Université de Haute Alsace
IUT MULHOUSE. Département GEII
Cours de Mathématiques.
Module MA21

CALCUL INTEGRAL
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Michel GOZE - Elisabeth REMM
http:\\ www.algebre.uha.fr

20 mars 2012

Formation Scientifique et Humaine		
Ma21 - Calcul intégral et équations différentielles		
UE **FSH**	Matière **Mathématiques**	Volume horaire **12C,14TD,4TP**
Référence **Ma21**	Module **Calcul intégral et équations différentielles**	Positionnement **S2**

Objectifs :

Permettre à l'étudiant de réinvestir les outils de calcul intégral et différentiel dans les autres disciplines.

Compétences minimales :

Maîtriser les techniques d'intégration nécessaires,
La résolution des équations différentielles du programme doit être aisée.

Pré-requis :

Modules Ma11 et Ma12.

Contenu :

Techniques d'intégration,
Intégration des fonctions trigonométriques usuelles,
Intégration des fonctions fractions rationnelles,
Équations différentielles linéaires du 1° et du 2° ordre, à coefficients constants,
Fonctions équivalentes au voisinage de l'infini,
Intégrales impropres des types $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ (définitions, convergence, théorèmes sur les fonctions positives, convergence absolue de fonctions à valeurs complexes).

Modalités de mise en œuvre :

La prouesse technique cèdera le pas devant des applications à des domaines divers (circuits électriques, modèles d'évolution démographique, physique, etc.). Les méthodes numériques d'intégration (rectangle, trapèze) peuvent faire l'objet de séances de TP sur logiciel.

Prolongements :

Convolution,
Corrélation,
Résolution numérique d'une équation différentielle par la méthode d'Euler,
Résolution d'équations différentielles de la physique appliquée (équations différentielles linéaires à coefficients non constants du 1° ordre).

Mots-clés :

Variable, sommation, primitive, techniques d'intégration.

Table des matières

Chapitre 1

Techniques d'intégration

1.1 Primitive d'une fonction continue

1.1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle.

Définition 1 *On appelle primitive de f toute fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que*

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi la fonction F n'est connue que par sa dérivée. Le problème essentiel, très difficile à résoudre dans le cas général, consiste à trouver F connaissant la dérivée F'.

Exemples

1. Soit f la fonction nulle : $f(x) = 0$ pour tout x. Alors F est une fonction dont la dérivée est nulle. C'est donc une fonction constante. Ainsi toute fonction F donnée par $F(x) = a$ est une primitive de $f(x) = 0$. On voit donc sur cet exemple qu'il existe une infinité de primitives.
2. Soit f la fonction $f(x) = x$. Alors F vérifie $F'(x) = x$. On peut donc prendre

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Mais toute fonction

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + a$$

avec $a \in \mathbb{R}$ convient aussi.

Proposition 1 *Si f admet une primitive F, alors toute autre primitive de f est du type*

$$G(x) = F(x) + constante$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si F et G sont deux primitives de f, alors $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$F'(x) - G'(x) = (F - G)'(x) = 0.$$

La fonction $F - G$ est de dérivée nulle, elle est donc constante. ♣

L'ensemble des primitives de f est donc de la forme

$$\{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}.$$

On le note

$$\int f(x)dx.$$

Exemples

1. Déterminer $\int x^2 dx$. Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$. Ainsi

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

2. Déterminer $\int \sin x dx$. Une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$. Ainsi

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Théorème 1 *Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une primitive.*

Nous admettrons ce théorème. Rappelons que toutes les fonctions classiques, les polynômes, la fonction e^x, les fonctions $\sin x, \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction lnx est continue sur $]0, +\infty[$, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

1.1.2 Tableau des Primitives

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	C (constante)
$a, a \in \mathbb{R}$	$ax + C$
$x^n, n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$ln\|x\| + C$
$\dfrac{1}{x^n}, n > 1$	$\frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

1.1.3 Formule fondamentale

Soit f une fonction dérivable. Alors on a :

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

1.2 Techniques d'intégration

1.2.1 Linéarité

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions admettant des primitives (par exemple continues). On a alors*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

pout tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit F une primitive de f et soit G une primitive de g. Alors

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

La proposition se déduit de la formule fondamentale. ♣

Cette propriété permet d'intégrer tous les polynômes.

Exemples

1. Calcul de $\displaystyle\int (x^3+3x^2+2x+3)dx$. On a

$$\begin{aligned}\int (x^3+3x^2+2x+3)dx &= \textstyle\int x^3dx + \int 3x^2dx + \int 2xdx + \int 3dx \\ &= \textstyle\int x^3dx + 3\int x^2dx + 2\int xdx + 3\int dx \\ &= \tfrac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + 3x + C.\end{aligned}$$

2. Calcul de $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)dx$. On a

$$\begin{aligned}\int (\sin xdx + \cos x)dx &= \textstyle\int \sin xdx + \int \cos xdx \\ &= -\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

1.2.2 Intégration par parties

Proposition 3 *Soient f et g deux fonctions dérivables. On a*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration. On a

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

On en déduit

$$\int (f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

D'après la formule fondamentale

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

d'où la proposition. ♣

Exemples

1. Calcul de $\displaystyle\int xe^x dx$. Posons

$$f(x) = x, \quad g'(x) = e^x.$$

Alors

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = e^x.$$

(on choisit comme primitive de $g'(x)$ la fonction $g(x)$). On en déduit

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \textstyle\int 1e^x dx \\ &= xe^x - \textstyle\int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C.\end{aligned}$$

2. Calcul de $\displaystyle\int x \sin x dx$. Posons
$$f(x) = x, \quad g'(x) = \sin x.$$
Alors
$$f'(x) = 1, \quad g(x) = -\cos x.$$
On en déduit
$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x\cos x - \textstyle\int 1(-\cos x)dx \\ &= -x\cos x + \textstyle\int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

3. Calcul de $\displaystyle\int x^2 e^x dx$. Posons
$$f(x) = x^2, \quad g'(x) = e^x.$$
Alors
$$f'(x) = 2x, \quad g(x) = e^x.$$
On en déduit
$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \textstyle\int 2xe^x dx \\ &= x^2 e^x - 2\textstyle\int xe^x dx \end{aligned}$$
Il est nécessaire de faire encore une intégration par parties pour calculer la dernière intégrale. Ceci a été fait dans le premier exemple. On a
$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$
D'où
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1$$
où C_1 est une constante.

Remarque. Il faut faire très attention aux choix des fonctions f et g dans l'intégration par parties. Reprenons le premier exemple : $\displaystyle\int xe^x dx$. Posons cette fois
$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = x.$$
Alors
$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$
On en déduit
$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$
Dans ce cas, la deuxième intégrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{2}e^x dx$ est "plus compliquée" que celle que nous comptions calculer. On a donc rien gagné en appliquant ainsi la formule d'intégration par parties.

1.2.3 Changement de variable

Rappelons dans un premier temps la formule donnant la dérivée de la composée de deux fonctions. Soient f et g deux fonctions dérivables d'une variable réelle. Alors

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

où $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Proposition 4 *Supposons que x s'écrive comme une fonction dérivable d'une variable t, c'est-à-dire, on a $x = x(t)$. Alors on a*

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt.$$

Démonstration. Ceci provient de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée. ♣

Exemples

1. Calcul de $\int \frac{1}{x-2}dx$. Posons $t = x - 2$. On a donc dans ce cas
$$x(t) = t + 2.$$
Alors $x'(t) = 1$ et la formule de changement de variable donne
$$\int \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{t}1dt = \ln|t| + C.$$
D'où
$$\int \frac{1}{x-2}dx = ln|t| + C = \ln|x-2| + C.$$

2. Calcul de $\int \sqrt{1-x^2}dx$. La fonction $\sqrt{1-x^2}$ est définie pour $x \in [-1, 1]$. Posons $x(t) = \cos t$. On a donc dans ce cas
$$x'(t) = -\sin t$$
et
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t}.$$
Si $t \in [0, \pi]$, alors $x \in [-1, 1]$ et $\sin t \geq 0$. D'où $\sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$. Ainsi
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sin t(-\sin t)dt = -\int \sin^2 t dt.$$
Nous verrons dans le chapitre suivant comment intégrer des polynômes trigonométriques. On a
$$\sin^2 t = \frac{1-\cos t}{2}.$$

Ainsi

$$\int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{2} + C.$$

Comme $x(t) = \cos t$, alors $t = \arccos x$. Ainsi

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{\sin 2(\arccos x)}{2} + C.$$

1.3 Les intégrales définies $\int_a^b f(x)dx$.

1.3.1 Définition

Soit f une fonction admettant une primitive F. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors pour toute autre primitive G de f on a

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

En effet on a $G(x) = F(x) + C$. D'où

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Définition 2 *Soit f une fonction d'une variable réelle admettant une primitive F. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.3.2 Techniques de calcul

Elles se déduisent des techniques du calcul des primitives.

1. Linéarité :
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$
pout tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Intégration par partie :
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
où $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

3. Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f(x(t))x'(t)dt.$$

Prendre garde aux nouvelles bornes !

Exemples

1. Calculer $\int_1^2 (x+1)^2 dx$. On a

$$\int_1^2 (x+1)^2 dx = \int_1^2 (x^2+2x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_1^2 = \frac{8}{3} + 4 + 2 - \frac{1}{3} - 1 - 1 = \frac{19}{3}.$$

2. Calculer $\int_{-1}^1 x\cos x dx$. Faisons une intégration par parties.

$$\int_{-1}^1 x\cos x dx = [x\sin x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sin x dx = [x\sin x]_{-1}^1 + [\cos x]_{-1}^1 .$$

D'où

$$\int_{-1}^1 x\cos x dx = \sin 1 - (-\sin(-1)) + \cos 1 - \cos(-1) = \sin 1 + \sin(-1)) + \cos 1 - \cos(-1) = 0$$

car $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = cosx$.

3. Calculer $\int_1^2 \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$. Posons

$$t = 2 + \cos x.$$

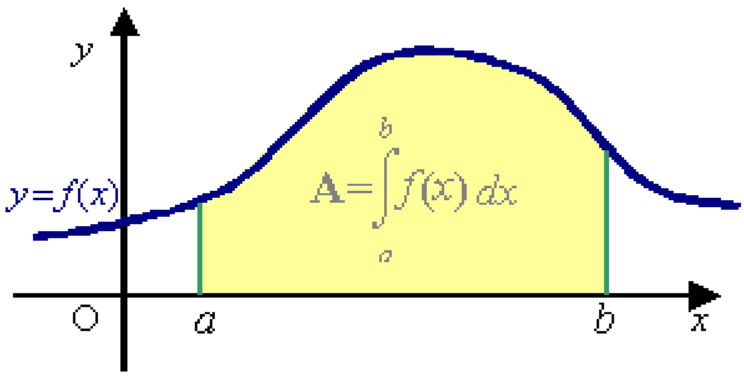
Lorsque $x = 1$ alors $t = 2 + \cos 1$ et lorsque $x = 2$, $t = 2 + \cos 2$. Ainsi, en appliquant la formule de changement de variable, comme $dt = -\sin x dx$,

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{2+\cos x} dx = \int_{2+\cos 1}^{2+\cos 2} -\frac{1}{t} dt = [-\ln|t|]_{2+\cos 1}^{2+\cos 2}$$

d'où

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{2+\cos x} dx = -\ln(2+\cos 2) + \ln(2+\cos 1) = \ln\frac{2+\cos 1}{2+\cos 2}.$$

1.3.3 Interprétation géométrique



Si f est une fonction positive continue, alors $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'aire de la région sous le graphe de f depuis a jusqu'à b et limitée en bas par l'axe des abscisses. Ceci permet de calculer des aires de telle région.

1.3.4 Inversion des bornes

Proposition 5 *On a*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. En effet, si F est une primitive de f alors

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx.$$

♣

Exemple Supposons que f soit une fonction impaire. Elle vérifie $f(-x) = -f(x)$. Alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

En effet

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Calculons $\int_{-a}^0 f(x)dx$. Pour cela considérons le changement de variable $u = -x$.

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{+a}^0 f(-u)d(-u) = \int_{+a}^0 f(u)d(u) = \int_0^a -f(u)d(u).$$

Ainsi

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx.$$

D'où le résultat.

1.3.5 Formule de la moyenne

Proposition 6 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Il existe un point $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. Elle repose sur la formule des accroissements finis. Considérons une primitive F de f. C'est une fonction dérivable et la dérivée est continue. La formule des accroissements finis appliquée à F s'écrit :

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(c)$$

avec $c \in]a,b[$. Comme $F' = f$, on en déduit

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

♣

Applications

1. Si $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice Vitesse moyenne d'échauffement d'une résistance. On considère un circuit constitué d'une résistance et d'un alternateur produisant un courant d'intensité

$$I(t) = I_M \sin(\omega t).$$

La vitesse moyenne d'échauffement de la résistance est

$$P(t) = I^2(t)R.$$

La vitesse moyenne d'échauffement par cycle complet est

$$P(c) = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I^2(t)dt = \frac{R\omega I_M^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt.$$

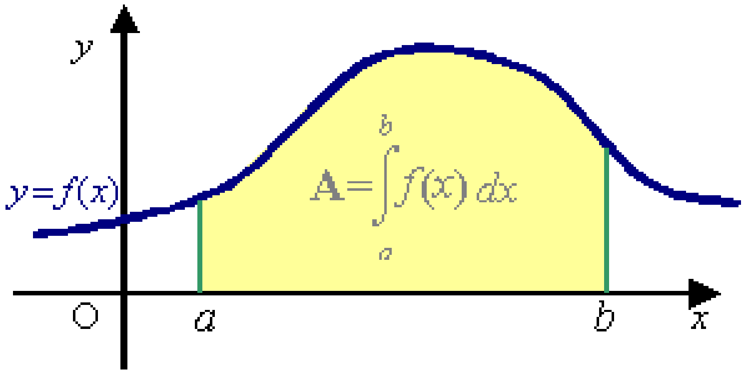
Nous calculerons cette intégrale dans le chapitre suivant.

1.4 Calcul numérique des intégrales définies

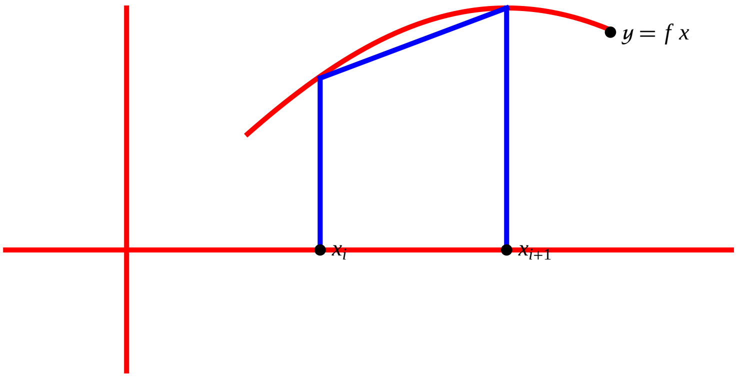
Nous exposons ici la méthode la plus classique de calcul numérique d'une intégrale définie, appelée aussi la méthode du trapèze. Rappelons tout d'abord la formule donnant l'aire d'un trapèze

$$A = \frac{B+b}{2}h$$

où B est la grande base, b la petite base et h la hauteur. Pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$, en supposnat que f soit positive sur $[a,b]$, nous découpons le segment $[a,b]$ en n segments égaux de longueur $\dfrac{b-a}{n}$ correspondant à la subdivision $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.



L'aire délimitée par les points $A_i = (x_i, 0), M_i = (x_i, f(x_i)), M_{i+1} = (x_{i+1}, f(x_{i+1})), A_{i+1} = (x_{i+1}, 0)$ est alors assimilée à l'aire du trapèze définie par ces quatre points.



Cette aire du trapèze vaut

$$\frac{(f(x_{i+1}) + f(x_i)).(x_{i+1} - x_i)}{2} = \frac{(f(x_{i+1}) + f(x_i)).(b-a)}{2n}$$

On en déduit

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (f(a) + f(x_1))\frac{b-a}{2n} + (f(x_1) + f(x_2))\frac{b-a}{2n} + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(b))\frac{b-a}{2n}$$

où le signe $\approx$ signifie à peu près égal. On a donc la formule suivante

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)\right).$$

L'erreur commise dans ce calcul approximatif est de l'ordre de

$$\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

où M est le maximum de f sur $[a,b]$.

1.5 EXERCICES

Exercice 1. Calculer

$$\int xdx; \quad \int x^4dx : \quad \int (x^3-2x^2+1)dx : \quad \int \frac{1}{2x}dx :$$
$$\int e^x dx : \quad \int xe^{x^2}dx : \quad \int sin2xdx : \quad \int cos^2xdx.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales définies suivantes

$$\int_1^3 (2x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx; \quad \int_1^5 x^3dx : \quad \int_1^1 (x^3-2x+1)dx : \quad \int_0^1 \frac{e^x}{2}dx :$$
$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx : \quad \int_0^{3\pi} \mid sinx \mid dx : \quad \int_0^{100\pi} \mid sinx \mid dx : \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+cosx}{2}}dx.$$

Exercice 3. On estime que la température d'une journée froide d'hiver en fonction de l'heure suit la formule

$$T = \frac{1}{36}t(t-12)(t-24)-18$$

où t est le temps en heures et $t=0$ correspond à minuit. Quelle est la température moyenne entre 6 heures du matin et midi ?.

Exercice 4. Estimer l'intégrale définie

$$\int_1^3 (x^2+1)dx$$

en utilisant la méthode des trapèzes pour $n=4$. On calculera à chaque étape $f(x_k)$ avec 4 décimales. Comparer ces deux résultats avec la valeur exacte de cette intégrale.

Exercice 5. On considère la fonction $f(x)$ définie sur $[-1,5]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } \ x \in [-1,1] \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \text{ si } \ x \in [1,4] \\ 2x-\frac{17}{2} \text{ si } \ x \in [4,5] \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)dx.$

Exercice 6. En utilisant une intégration par parties, calculer

$$\int x\sin xdx; \quad \int x^4dx : \quad \int xe^xdx : \quad \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Exercice 7. En utilisant une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx; \quad \int_0^1 x(1-x)^n dx; \quad \int_0^\pi x^2\sin(2x)dx; \quad \int_0^\pi x^2\cos 2x dx.$$

Exercice 8. Intégrer, en utilisant un changement de variables

$$\int (x+1)^2 dx; \quad \int \sqrt{x+1}dx; \quad \int \frac{x}{x^2+1}dx; \quad \int \frac{1}{(x-2)^3}dx.$$

Exercice 9. Estimer par la méthode des trapèzes

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx.$$

On découpera l'intervalle d'intégration en 10 morceaux égaux.

Exercice 10. Calculer l'aire de la région située entre les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

Chapitre 2

Intégration des fonctions trigonométriques usuelles

2.1 Rappels de trigonométrie et sur les nombres complexes

2.1.1 Formules classiques de trigonométrie

Rappelons très rapidement les formules de base de trigonométrie.

1. $$\cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

2. $$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

3. $$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

4. $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

5. $$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

6. $$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a. \end{aligned}$$

Exemple. Calcul de $\sin^2 a$ et $\cos^2 a$ en fonction de $\cos 2a$. On a

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1.$$

Ainsi

$$\cos^2 a = \frac{\cos(2a) + 1}{2}.$$

De même

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

2.1.2 Trigonométrie et nombres complexes

Un nombre complexe s'écrit

$$z = x + iy$$

avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le réel x est appelé la partie réelle de z et y la partie imaginaire. Le nombre complexe i vérifie $i^2 = -1$. Les règles de calcul sur les nombres complexes sont les suivantes :

1. Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Multiplication

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

3. Division. Supposons $z_2 \neq 0$. Alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

et donc

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z.

Un nombre complexe admet une autre écriture, sous forme module et argument. Soit $z = x + iy$. On pose

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Comme on suppose $\rho \geq 0$, on a alors

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

et ρ est appelé le module de z. L'angle θ est appelé l'argument de z. Il n'est pas unique mais défini à $2k\pi$-près. Il est donné, si $z \neq 0$, par

$$\theta = \arccos \frac{x}{\rho}.$$

Définition 3 *On appelle exponentielle complexe, le nombre complexe*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

On a alors l'écriture d'un nombre complexe suivantre :

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$$

avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

2.1.3 Formules d'Euler

Proposition 7 *(Formules d'Euler). On a*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Démonstration. En effet, on a

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

On en déduit

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x, \quad e^{-ix} + e^{-ix} = 2\sin x.$$

Les formules d'Euler s'en déduisent. ♣

Exemple. Calcul de e^{2ix}. On a, d'après les formules d'Euler,

$$e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x.$$

Plus généralement

$$e^{ipx} = \cos px + i\sin px$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Cette dernière formule est connue sous le nom de formule de Moivre.

2.2 Linéarisation de $\cos^p x$ et de $\sin^p x$

Linéariser $\cos^p x$ ou $\sin^p x$ consiste à écrire $\cos^p x$ ou $\sin^p x$ sous forme d'une somme de $\cos mx$ et $\sin qx$ (avec m et q inférieur ou égal à p. Pour cela, on utilise les formules d'Euler.

Rappelons avant tout la formule du binôme :

$$(a+b)^q = a^q + C_q^1 a^{q-1}b + \cdots + C_q^s a^{q-s}b^s + \cdots + b^q$$

avec

$$C_q^s = \frac{q!}{s!(q-s)!}$$

pour $s \leq q$. Rappelons que, par convention, on pose $0! = 1$.

On a

$$\cos^p x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p}(e^{ix} + e^{-ix})^p$$

Développons $(e^{ix} + e^{-ix})^p$ et simplifions en remarquant que $e^{iqx}e^{-isx} = e^{i(q-s)x}$,

$$\begin{aligned}
(e^{ix} + e^{-ix})^p &= e^{ipx} + pe^{i(p-1)x}e^{-ix} + \cdots + C_p^q e^{i(p-q)x}e^{-iqx} + \cdots + e^{-ipx} \\
&= e^{ipx} + pe^{i(p-2)x} + \cdots + C_p^q e^{i(p-2q)x} + \cdots + e^{-ipx} \\
&= (e^{ipx} + e^{-ipx}) + p(e^{i(p-2)x} + e^{-i(p-2)x}) + \cdots + C_p^q(e^{i(p-2q)x} + e^{-i(p-2q)x}) + \cdots
\end{aligned}$$

Dans cette expression, on peut regrouper les termes 2 par 2 de la manière suivante : si e^{ikx} est dans l'expression avec un coefficient égal par exemple à α, alors e^{-ikx} est également dans l'expression avec le même coefficient α et on regroupe en écrivant $\alpha(e^{ikx} + e^{-ikx})$. On simplifie enfin en écrivant que $e^{ikx} + e^{-ikx} = 2\cos(kx)$.

Exemple. Linéarisation de $\cos^3 x$. On a

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}(e^{ix} + e^{-ix})^3.$$

Mais

$$\begin{aligned}
(e^{ix} + e^{-ix})^3 &= e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix} \\
&= e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix} \\
&= e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= 2\cos 3x + 6\cos x.
\end{aligned}$$

D'où

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

Linéarisons maintenant $\sin^p x$. On a

$$\sin^p x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^p = \frac{1}{2^p i^p}(e^{ix} - e^{-ix})^p$$

Rappelons que $i^2 = -1, i^3 = -i$ et $i^4 = 1$. Ceci permet de simplifier i^p. Développons $(e^{ix} - e^{-ix})^p$ et simplifions comme ci-dessus. En regroupant les termes e^{ikx} et e^{-ikx} on obtient la linéarisation de $\sin^p x$.

Exemples.

1. Linéarisation de $\sin^3 x$. On a

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{2^3 i^3}(e^{ix} - e^{-ix})^3.$$

Mais

$$\begin{aligned}
(e^{ix} - e^{-ix})^3 &= e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix} \\
&= e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix} \\
&= e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})
\end{aligned}$$

D'où
$$\sin^3 x = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$$

2. Linéarisation de $\sin^4 x$. On a
$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{2^4 i^4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4.$$

Mais
$$\begin{aligned}(e^{ix} - e^{-ix})^4 &= e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\\ &= e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\\ &= e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6.\end{aligned}$$

On en déduit
$$\sin^4 x = \frac{1}{2^4}(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6) = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}.$$

2.3 Linéairisation de $\cos^p x \sin^q x$

La méthode est toujours la même. On écrit
$$\begin{aligned}\cos^p x \sin^q x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q\\ &= \frac{1}{2^{p+q} i^q}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^p \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^q\end{aligned}$$

et on développe chacun des facteurs. On regroupe les termes du type e^{kix} et e^{-ikx} et on applique enfin les formules d'Euler.

Exemple. Linéarisation de $\cos^2 x \sin x$. On a
$$\begin{aligned}\cos^2 x \sin x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{2^3 i}(e^{ix} + e^{-ix})^2(e^{ix} - e^{-ix})\\ &= \frac{1}{8i}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})(e^{ix} - e^{-ix})\\ &= \frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{ix} + 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-ix} - e^{-3ix})\\ &= \frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix} + e^{ix} - e^{-ix})\\ &= \frac{\sin 3x}{4} + \frac{\sin x}{4}.\end{aligned}$$

2.4 Calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$

La méthode est simple :

1. On linéarise $\cos^p x \sin^q x$
2. On intègre chacun des termes

$$\int \cos(kx)dx, \quad \int \sin(kx)dx$$

sachant que

$$\int \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\sin kx + C, \quad \int \sin(kx)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C.$$

Exemple. Calcul de $\int \cos^2 x \sin x dx$. On a vu ci-dessus que

$$\cos^2 x \sin x = \frac{\sin 3x}{4} + \frac{\sin x}{4}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin x dx &= \int \frac{\sin 3x}{4}dx + \int \frac{\sin x}{4}dx \\ &= -\frac{\cos 3x}{12} - \frac{\cos x}{4} + C. \end{aligned}$$

2.5 EXERCICES

Exercice 1. Linéariser

1. $\cos^4 x$,
2. $\sin^3 x \cos x$,
3. $\sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin x \cos^3 x$

Exercice 2 . Calculer

1. $\int \cos^4 x dx$,
2. $\int \sin^3 x \cos x dx$,
3. $\int \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin x \cos^3 x dx$

Exercice 3 . Calculer sans faire de linéarisation

1. $\int \sin^3 x \cos x dx$
2. $\int \cos^3 x \sin x dx$

Exercice 4 . Calculer

1. En linéarisant $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$
2. La même intégrale, mais sans linéaristation. Pour cela on écrira

$$\cos^3 x \sin^4 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x$$

   et on fera le changement de variable $u = \sin x$.

Exercice 5 .

1. Rappeler les dérivées de $\tan x$ et $\cot x$.
2. Calculer $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$.
3. Calculer $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}} dx$. Pour cela, on posera $x = 4 \cos u$.

Chapitre 3

Intégration des fractions rationnelles

3.1 Rappels sur les polynômes

3.1.1 Opérations classiques sur les polynômes

Rappelons qu'un polynôme à coefficients réels (respectivement complexes) s'écrit

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

les coefficients $a_0, \cdots, a_n$ étant réels (respectivement complexes). Si $a_n \neq 0$, alors n est le degré de $P(X)$. Les opérations élémentaires sur les polynômes sont :

1. L'addition :

   $$(a_0 + \cdots + a_nX^n) + (b_0 + \cdots + b_pX^p) = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_p + b_p)X^p + a_{p+1}X^{p+1} + \cdots + a_nX^n$$

   en supposant que $n \geq p$.

2. La multiplication :

   $$(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n).(b_0 + b_1X + \cdots + b_pX^p) = c_0 + c_1X + \cdots + c_{n+p}X^{n+p}$$

   avec

   $$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$$

   pour tout $k = 0, 1, \cdots, n + p$.

3. La division euclidienne : Etant donnés deux polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$ tels que le degré de P_1 soit supérieur ou égal à celui de P_2, il existe deux polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ tels que

   $$P_1(X) = P_2(X)Q(X) + R(X)$$

avec

$$d(R(X)) < d(P_2(X))$$

où $d(P)$ désigne le degré de P.

Exemple. On posera pratiquement la division ainsi :

$$\begin{array}{ccc|l} X^2 & +3X & +3 & X+1 \\ & & & ----\\ -X^2 & -X & & X+2 \\ & 2X & +3 & \\ & -2X & -2 & \\ & & 1 & \end{array}$$

le reste est donc 1.

4. La division suivant les puissances croissantes. Cette division se pose pratiquement comme la division euclidienne mais on écrit les polynômes P_1 et P_2 suivant les puissances croissantes. Il n'existe pas de conditions sur les restes (cette division ne s'arrête pas toute seule !). Par contre le quotient est un polynôme si le coefficient de plus bas degré de P_1 est supérieur ou égal à celui de P_2.

   Exemple. On posera pratiquement la division ainsi :

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & +2X & +2X^2 & & 1+X \\ & & & & ----\\ -3 & -3X & & & 3-X+3X^2 \\ & -X & +2X^2 & & \\ & X & +X^2 & & \\ & & +3X^2 & & \\ & & -3X^2 & -3X^3 & \\ & & & -3X^3 & \end{array}$$

   et on arrête volontairement la division ici (ceux qui veulent peuvent continuer !).

3.1.2 Factorisation des polynômes

Soit $P(X)$ un polynôme réel ou complexe. Un élément $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une racine de $P(X)$ si $P(a) = 0$.

Proposition 8 *Si a est racine de $P(X)$, alors $(X-a)$ se met en facteur, soit*

$$P(X) = (X-a)P_1(X).$$

Considérons le polynôme dérivé de $P(X)$. Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, alors

$$P'(X) = a_1 + 2a_2(X) + \cdots + na_nX^{n-1}.$$

L'élément a est une racine double de P si $P(a) = P'(a) = 0$. Dans ce cas, on a la factorisation

$$P(X) = (X - a)^2 P_2(X).$$

De manière générale, si a est racine d'ordre k, c'est-à-dire si $P(a) = P'(a) = P^{(k-1)}(a) = 0$ où $P^{(l)}$ désigne la dérivée d'ordre l de P, alors on a la factorisation

$$P(X) = (X - a)^k P_k(X).$$

Remarque. La recherche des racines d'un polynômes n'est pas très facile. On sait trouver les racines d'un polynômes de degré 2. En effet si $P(X) = aX^2 + bX + c$ est à coefficients réels, alors le discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

et on a

1. si $\Delta > 0$, on a les racines réelles
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. si $\Delta = 0$, on a une racine double
$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$
3. si $\Delta < 0$, on n'a pas de racines réelles mais deux racines complexes conjuguées
$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Pour les équations de degré 3, il existe également des formules (dites Formules de Cardan), mais peu utilisables pratiquement. Par contre, au délà du degré 5, pour les degré impair, on sait qu'il n'existe pas de formules donnant explicitement les racines (résultat d'Evariste Galois). Donc la recherche se fait souvent de manière informatique par des calculs approchés.

3.2 Intégrales de fractions rationnelles élémentaires

3.2.1 Calcul de $\int \frac{1}{x-a} dx$.

Proposition 9

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x - a| + C.$$

3.2.2 Calcul de $\int \frac{1}{(x-a)^2} dx$.

Proposition 10

$$\int \frac{1}{(x-a)^2} dx = -\frac{1}{x-a} + C.$$

Ceci se déduit du tableau des primitives.

3.2.3 Calcul de $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$.

Proposition 11 *Si $n \geq 2$, alors*

$$\int \frac{1}{(x-a)^2} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

C'est une généralisation du cas précédent.

3.2.4 Calcul de $\int \frac{1}{ax+b} dx$.

Proposition 12

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

Le changement de variable $u = ax + b$ conduit au résultat.

3.2.5 Calcul de $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$.

Proposition 13 *Si $n \geq 2$, alors*

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)a} \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C.$$

3.2.6 Calcul de $\int \frac{1}{x^2+1} dx$.

Par définition

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C.$$

3.2.7 Calcul de $\int \frac{1}{x^2+a} dx$ avec $a > 0$

On a

$$x^2 + a = a(\frac{x^2}{a} + 1).$$

Posons $u = \frac{x}{\sqrt{a}}$. Alors $u^2 = \frac{x^2}{a}$ et $du = \frac{1}{\sqrt{a}} dx$. Ainsi

$$\int \frac{1}{x^2+a} dx = \int \frac{1}{a(\frac{x^2}{a}+1)} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2+1} \sqrt{a} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{u^2+1} du.$$

On est ramené au cas précédent. Ainsi

$$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$$

3.2.8 Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Comme $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles. Ecrivons le sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}).$$

Posons $u = x + \frac{b}{2a}$. Alors

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{a(u^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2})}du = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+\alpha}du.$$

Comme $\alpha = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ est positif, on est ramené au cas précédent. On déduit

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{u}{\sqrt{\alpha}} + C = \frac{1}{a}\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$$

3.3 Décomposition en éléments simples

3.3.1 Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle réelle s'écrit sous la forme $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ où $N(X)$ et $D(X)$ sont des polynômes à coefficients réels.

Définition 4 *On appelle partie entière de la fraction rationnelle* $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ *le quotient* $E(X)$ *de la division euclidienne de* N *par* D.

On a donc

$$N = DE + R$$

avec degré$(R) <$ degré (D). La fraction s'écrit donc

$$\frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}.$$

Définition 5 *On appelle pôle de la fraction rationnelle* $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ *les racines du dénominateur* $D(X)$.

Ainsi si a est un pôle d'ordre k, on aura

$$D(X) = (X-a)^k D_1(X).$$

3.3.2 Décomposition en éléments simples de première espèce

Proposition 14 *On a*

$$\frac{N(X)}{(X-a)^k(X-b)^l} = E(X) + \frac{A_1}{(X-a)^k} + \cdots + \frac{A_k}{(X-a)} + \frac{B_1}{(X-b)^l} + \cdots + \frac{B_l}{(X-b)}.$$

Le deuxième membre s'appelle la décomposition en éléments simples de première espèce Chacune des fractions du deuxième membre est, par définition, un élément simple de première espèce. Pour justifier cette décomposition, on considère $N(X) = D(X)E(X) + R(X)$, la division euclidienne. Ainsi $R(X)$ est de degré inférieur à celui de $D(X)$. On va faire la décomposition de $\dfrac{R(X)}{D(X)}$. Posons $D(X) = (X-a)^k D_1(X)$ avec $D_1(a) \neq 0$. Posons

$$X - a = T.$$

Ainsi $D(X)$ s'écrit $T^k D_1(T)$ où $D_1(T)$ est le polynôme en T obtenu à partir de $D_1(X)$ en substituantb X pat $T+a$. Substituons également X par $T+a$ dans $R(X)$. On obtient un polynôme, noté $R(T)$, mais de la variable T. On fait ensuite la division suivant les puissances croissantes de $R(T)$ par $D_1(T)$. Cela s'écrit

$$R_1(T) = (A_1 + A_2 T + \cdots + A_k T^{k-1})D_1(T) + T^K R_2(T).$$

On en déduit

$$\frac{R(T)}{T^k D_1(T)} = \frac{A_1}{(T)^k} + \cdots + \frac{A_k}{(T)} + \frac{R_2(T)}{D_1(T)}.$$

En revenant à X on trouve

$$\frac{R(X)}{(X-a)^k(X-b)^l} = E(X) + \frac{A_1}{(X-a)^k} + \cdots + \frac{A_k}{(X-a)} + \frac{R_2(X)}{D_1(X)}.$$

Au second membre apparaît un polynôme de degré k par rapport à la variable $\frac{1}{X-a}$ dont le terme constant est nul. Ce polynôme est appelé la partie principale de $\frac{N(X)}{D(X)}$ par rapport au pôle a.

Si $D_1(X) = (X-b)^l D_2(X)$, on détermine de la même façon la partie principale par rapport au pôle b. Ceci justifie la proposition. Bien entendu, ceci se généralise au cas d'une factorisation de $D(X)$ sous la forme

$$D(X) = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\cdots(X-a_p)^{k_p}.$$

Exemple. Décomposition en éléments simples de

$$\frac{X}{(X-1)^4(X-2)}.$$

Comme le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on n'a pas besoin de faire la division. La décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{(X-1)^4(X-2)} = \frac{A_1}{(X-1)^4} + \frac{A_2}{(X-1)^3} + \frac{A_3}{(X-1)^2} + \frac{A_4}{(X-1)} + \frac{B_1}{(X-2)}.$$

Posons
$$X - 1 = T.$$
Alors
$$D(X) = (X-1)^4(X-2) = T^4(T-1).$$
et $\dfrac{X}{(X-1)^4(X-2)}$ s'écrit
$$\frac{T+1}{T^4(T-1)}.$$
Faisons la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 3 de $T+1$ par $T-1$. On a
$$1 + T = (-1 - 2T - 2T^2 - 2T^3)(-1+T) + 2T^4.$$
D'où
$$\frac{T+1}{T^4(T-1)} = \frac{1}{T^4}(-1 - 2T - 2T^2 - 2T^3)(-1+T) + \frac{2T^4}{T^4(T-1)}.$$
En revenant à X, on obtient
$$\frac{X}{(X-1)^4(X-2)} = \frac{-1}{(X-1)^4} + \frac{-2}{(X-1)^3} + \frac{-2}{(X-1)^2} + \frac{-2}{(X-1)} + \frac{2}{(X-2)}.$$
Notons que ce calcul nous a donné également le coefficient B_1. Nous aurions pu le calculer par la méthode précédente.

Lorsque un pôle est simple,
$$\frac{R(X)}{(X-a)(D_1(X)}$$
avec $D_1(a) \neq 0$, alors la décomposition commence par
$$\frac{R(X)}{(X-a)(D_1(X)} = \frac{A_1}{(X-a)} + \cdots$$
et nous pouvons calculer la coefficient A_1 directement par le calcul suivant : on multiplie tout par $X - a$, ce qui donne
$$\frac{R(X)}{D_1(X)} = A_1 + (X-a).\cdots$$
et faisant $X = a$ on obtient
$$A_1 = ds\frac{R(a)}{D_1(a)}.$$

Exemple. Décomposition en éléments simples de
$$\frac{X}{(X-1)^4(X-2)}.$$

La décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{(X-1)^4(X-2)} = \frac{A_1}{(X-1)^4} + \frac{A_2}{(X-1)^3} + \frac{A_3}{(X-1)^2} + \frac{A_4}{(X-1)} + \frac{B_1}{(X-2)}.$$

Calculons B_1. On multipliue tout par $X-2$

$$\frac{X}{(X-1)^4} = (X-2)(\frac{A_1}{(X-1)^4} + \frac{A_2}{(X-1)^3} + \frac{A_3}{(X-1)^2} + \frac{A_4}{(X-1)}) + B_1$$

et on fait $X=2$. On obtient

$$\frac{2}{(2-1)^4} = 2 = B_1.$$

Exemple. Décomposition en éléments simples de

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X+1)}.$$

La décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X+1)} = \frac{A_1}{X-1} + \frac{B_1}{X-2} + \frac{C_1}{X+1}.$$

Pour calculer A_1 on multiplie par $X-1$ et on fait $X=1$. On trouve

$$\frac{1}{(1-2)(1+1)} = \frac{-1}{2} = A_1.$$

Pour calculer A_2 on multiplie par $X-2$ et on fait $X=2$. On trouve

$$\frac{2}{(2-1)(2+1)} = \frac{2}{3} = B_1.$$

Pour calculer C_1 on multiplie par $X+1$ et on fait $X=-1$. On trouve

$$\frac{-1}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{-1}{6} = C_1.$$

D'où

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)(X+1)} = \frac{-1}{2(X-1)} + \frac{2}{3(X-2)} - \frac{1}{6(X+1)}.$$

3.3.3 Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

Proposition 15 *On a*

$$\frac{N(X)}{(X-a)^k(X^2+pX+q)} = E(X) + \frac{A_1}{(X-a)^k} + \cdots + \frac{A_k}{(X-a)} + \frac{B_1X+B_2}{X^2+pX+q}.$$

Une fraction rationnelle du type $\dfrac{B_1X+B_2}{X^2+pX+q}$ avec $p^2-4q<0$est par définition un élément simple de deuxième espèce. Pour déterminer les coefficients B_1 et B_2, une fois les coefficients A_i déterminés, on peut tout réduire au même dénominateur et faire une identification. On peut aussi donner deux valeurs à X, ceci conduit à un système linéaire à deux équations et d'inconnues B_1 et B_2. On peut aussi trouver B_1 directement en multipliant tout par Xet faire tendre X vers l'infini. En effet

$$lim_{X\to+\infty}\frac{B_1X^2+B_2X}{X^2+pX+q}=B_1.$$

Exemple. Décomposition en éléments simples de

$$\frac{X}{(X-1)(X^2+1)}.$$

La décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{A_1}{X-1}+\frac{B_1X+B_2}{X^2+1}.$$

Pour calculer A_1 on multiplie par $X-1$ et on fait $X=1$. On obtient

$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=A_1$$

et

$$\frac{X}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{1}{2(X-1)}+\frac{B_1X+B_2}{X^2+1}.$$

Si on multiplie tout par X et on fait tendre X vers l'infini, on obtient

$$lim_{X\to+\infty}\frac{X^2}{(X-1)(X^2+1)}=0=\frac{1}{2}+B_1$$

et $B_1=-\frac{1}{2}$. D'où

$$\frac{X}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{1}{2(X-1)}+\frac{-X+2B_2}{2(X^2+1)}.$$

Reste à calculer B_2. On peut faire $X=0$. On obtient

$$0=-\frac{1}{2}+B_2$$

Ainsi $B_2=\frac{1}{2}$ et

$$\frac{X}{(X-1)(X^2+1)}=\frac{1}{2(X-1)}+\frac{-X+1}{2(X^2+1)}.$$

3.4 Intégration des fractions rationnelles

Description de la méthode pour intégrer une fraction rationnnelle :

Soit à calculer $\int \frac{N(X)}{D(X)} dX$

1. On écrit $\frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$ avec degré $R(X) <$ degré $D(X)$.
2. On décompose en éléments simples $\frac{R(X)}{D(X)}$.
3. On intègre chacun des éléments simples de première ou deuxième espèce en utilisant les résultats du paragraphe **3.2**.

Exemple. Intégrer la fraction rationnelle

$$\frac{X^4 - X^3 + X^2}{X^3 - X^2 + X - 1}.$$

Comme le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, on commence par faire la divison euclidienne. On obtient

$$\frac{X^4 - X^3 + X^2}{X^3 - X^2 + X - 1} = X + \frac{X}{X^3 - X^2 + X - 1}.$$

On factorise le dénominateur. Comme 1 est racine évidente, on a

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1).$$

D'où

$$\frac{X^4 - X^3 + X^2}{X^3 - X^2 + X - 1} = X + \frac{X}{(X-1)(X^2+1)}.$$

Décomposons en éléments simples $\frac{X}{(X-1)(X^2+1)}$. Cette décomposition a été étudiée ci-dessus :

$$\frac{X}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{1}{2(X-1)} + \frac{-X+1}{2(X^2+1)}.$$

On a donc

$$ds \int \frac{X^4 - X^3 + X^2}{X^3 - X^2 + X - 1} dX = \int X dX + \int \frac{1}{2(X-1)} dX + \int \frac{-X+1}{2(X^2+1)} dX.$$

Or

1. $\int X dX = \frac{X^2}{2} + C_1$
2. $\int \frac{1}{2(X-1)} dX = \frac{1}{2} \int \frac{1}{X-1} dX = \frac{1}{2} \ln|X-1| + C_2$.
3. $\int \frac{-X+1}{2(X^2+1)} dX = -\frac{1}{2} \int \frac{X}{X^2+1} dX + \frac{1}{2} \int \frac{1}{X^2+1} dX$. Or $\int \frac{X}{X^2+1} dX = \frac{1}{2} \int \frac{dX^2}{X^2+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + X_2) + C_3$. Ainsi
$$ds \int \frac{X^4 - X^3 + X^2}{X^3 - X^2 + X - 1} dX = \frac{X^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|X-1| - \frac{1}{4} \ln(1 + X_2) + \frac{1}{2} \arctan X + C.$$

3.5 EXERCICES

Exercice 1. Décomposer en éléments simples

1. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$
2. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
3. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$

Exercice 2. Intégrer les fractions rationnelles de l'exercice 1.

Exercice 3. Intégrer

1. $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$
2. $\dfrac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}$

Exercice 4. Calculer

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-4}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2-x-3}{x^3-1}dx$

Chapitre 4

Equations différentielles linéaires

Le but de ce chapitre est d'intégrer les équations différentielles linéaires suivantes

1. du premier ordre à coefficients non constants : $y' = a(x)y + b(x)$,
2. du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = d(x), \ a, b, c \in \mathbb{R}$.

4.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où $y = y(x)$ est une fonction dérivable de la variable x à déterminer et $a(x)$ et $b(x)$ des fonctions (continues) données. Le résultat fondamental sur lequel s'appuie la résolution est le suivant

Théorème 2 *Toute solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

est la somme

1. *de la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène (EDH) associée*

$$y' = a(x)y$$

2. *d'une solution particulière de l'équation générale.*

Ainsi la récherche des solutions de $y' = a(x)y + b(x)$ passera par les deux étapes décrites dans ce théorème.

4.1.1 Recherche de la solution générale de l'EDH associée

On considère
$$y' = a(x)y.$$
Pour trouver la solution générale on écrit
$$\frac{y'}{y} = a(x).$$
En intégrant les deux membres on obtient
$$\ln|y| = \int a(x)dx.$$
Soit $A(x) = \int a(x)dx$ une primitive de $a(x)$. On a alors
$$\ln|y| = A(x) + C$$
où C est une constante. Prenons l'exponentielle des deux membres :
$$|y| = e^{A(x)+C} = e^C e^{A(x)}.$$
Posons $K = e^C$ et supposons de plus que K puisse prendre le signe de y. Cela permet de simplifier les valeurs absonues et d'écrire
$$y(x) = Ke^{A(x)}.$$

Proposition 16 *La solution générale de l'EDH*
$$y' = a(x)y$$
s'écrit
$$y(x) = Ke^{A(x)}$$
où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Exemples

1. Soit l'équation différentielle homogène $y' = xy$. Alors
$$\frac{y'}{y} = x.$$
On en déduit
$$\ln|y| = \int a(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$
d'où
$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2}}.$$

2. Soit l'équation différentielle homogène $xy' - y = 0$. Cherchons les solutions dans $]0, +\infty[$ (ceci permet de diviser par x et d'écrire l'équation différentielle classiquement :
$$y' = \frac{1}{x}y.$$
Alors
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.$$
On en déduit
$$\ln|y| = \int a(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$
d'où
$$y(x) = Kx.$$

4.1.2 Recherche d'une solution particulière de l'équation générale $y' = a(x)y + b(x)$

La première chose à faire est de regarder s'il existe une solution évidente.

Exemples

1. Soit l'équation différentielle $y' = y + 2$. On voit, sans calcul, que $y = -2$ est une solution particulière. En effet $y' = 0$ et $0 = -2 + 2$. Dans ce cas, on n'a pas besoin de justifier son choix. Le "On voit", suffit.
2. Soit l'équation différentielle $y' = -xy + x$. On voit que $y = 1$ est une solution particulière. En effet, $y' = 0$ et donc $0 = -x + x$.

Supposons à présent qu'aucune solution évidente ne soit évidente ! On utilise alors la méthode, dite de la variation de la constante. La méthode a été inventée par le mathématicien et physicien Pierre-Simon Laplace. Elle tire son nom de ce que, pour l'essentiel, elle consiste à chercher les solutions sous une forme analogue à celle déjà trouvée pour l'EDH associée, mais en remplaçant la constante de cette solution par une nouvelle fonction inconnue. Ainsi, si $Ke^{A(x)}$ est la solution générale de l'EDH, on cherchera une solution particulière sous la forme
$$g(x) = K(x)e^{A(x)}$$
où $K(x)$ est une fonction inconnue. Comme $g(x)$ vérifie $y' = a(x)y + b(x)$, on aura
$$g'(x) = a(x)g(x) + b(x).$$
Remplaçons $g(x)$ par $K(x)e^{A(x)}$, on obtient
$$(K(x)e^{A(x)})' = K'(x)e^{A(x)} + K(x)A'(x)e^{A(x)} = K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)}$$
car $A(x)$ est une primitive de $a(x)$. On en déduit
$$K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x)$$

ce qui donne, après simplification

$$K'(x)e^{A(x)} = b(x).$$

La fonction $K(x)$ est donnée par

$$K(x) = b(x)\int e^{-A(x)}dx.$$

Le calcul de cette intégrale donne $K(x)$ et donc la solution particulière $g(x)$.

Exemple $y' = -xy + x^2 + 1$.

- Recherche de la solution générale de l'EDH associée $y' = -xy$. On a

$$\frac{y'}{y} = -x.$$

  Ainsi, en intégrant les deux parties

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C$$

  d'où

$$y = Ke^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante. Soit $g(x) = K(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Alors

$$g'(x) = K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x)xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

  On a alors

$$K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xK(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 + 1$$

  ce qui donne

$$K'(x) = (x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}$$

  et

$$K(x) = \int (x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}dx.$$

  Ainsi

$$K(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

  et la solution particulière est

$$g(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}} = x.$$

  (Notons que nous aurions pu trouver cette solution comme une solution évidente !)
- La solution générale de $y' = -xy + x^2 + 1$ est donc

$$Ke^{-\frac{x^2}{2}} + x.$$

Exemple Un circuit électrique comprend une bobine de résistance R et de self-induction L. A l'instant $t = 0$, on crée entre les bornes A et B d'un générateur, une différence de potentiel $E = V_A - V_B$. L'intensité i di courant est une fonction $i(t)$ solution de l'équation différentielle

$$Li'(t) + Ri = E.$$

1. Supposons que E soit constante. On a alors

$$i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + E.$$

   – Recherche de la solution générale de l'EDH associée $i'(t) = -\frac{R}{L}i(t)$. On a

$$\frac{i'}{i} = - - \frac{R}{L}.$$

   Ainsi, en intégrant les deux parties

$$\ln |i| = -\frac{R}{L}t + C$$

   d'où

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

   – Recherche d'une solution particulière. On a une solution évidente

$$g(t) = \frac{E}{R}.$$

   – La solution générale de $Li'(t) + Ri = E$, lorsque E est constante est

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}.$$

2. Supposons que E soit égale à $E_0 \sin \omega t$.

   – Recherche de la solution générale de l'EDH associée $i'(t) = -\frac{R}{L}i(t)$ Cela a été calculé ci-dessus, on a

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

   – Recherche d'une solution particulière de $i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + E_0 \sin \omega t$. Soit

$$g(t) = K(t)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

   On obtient

$$K'(t) = e^{\frac{R}{L}t}E_0 \sin \omega t.$$

   On en déduit

$$K(x) = \int e^{\frac{R}{L}t}E_0 \sin \omega t.$$

Intégrons par parties

$$\begin{aligned}
K(x) &= \tfrac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}E_0\sin\omega t - E_0\tfrac{L}{\omega R}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t \\
&= \tfrac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}E_0\sin\omega t - E_0\tfrac{L}{\omega R}\tfrac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t - E_0\tfrac{L}{\omega R}\tfrac{L}{\omega R}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t \\
&= \tfrac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}E_0\sin\omega t - E_0\tfrac{L}{\omega R}\tfrac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t - E_0\tfrac{L}{\omega R}\tfrac{L}{\omega R}K(t).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(1 + E_0\frac{L^2}{\omega^2R^2})K(t) = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}E_0\sin\omega t - E_0\frac{L}{\omega R}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t$$

soit

$$K(t) = \frac{\omega^2R^2}{\omega^2R^2 + E_0L^2}e^{\frac{R}{L}t}E_0(\frac{L}{R}\sin\omega t - E_0\frac{L^2}{\omega R^2}\cos\omega t.$$

– La solution générale de $Li'(t) + Ri = E$, lorsque E est constante est

$$\begin{aligned}
i(t) &= Ke^{-\frac{R}{L}t} + \tfrac{\omega^2R^2}{\omega^2R^2+E_0L^2}(E_0\tfrac{L}{R}\sin\omega t - E_0\tfrac{L^2}{\omega R^2}\cos\omega t) \\
&= Ke^{-\frac{R}{L}t} + \tfrac{E_0\omega^2R^2}{\omega^2R^2+E_0L^2}(\tfrac{L}{R}\sin\omega t - \tfrac{L^2}{\omega R^2}\cos\omega t)
\end{aligned}$$

4.1.3 Condition Initiale

Nous venons de donner toutes les solutions de $y' = a(x)y + b(x)$. La solution générale dépend d'une constante. Cette constante peut être calculée si l'on se donne une condition initiale qui se présente souvent de la forme $y(0)$ est donné ou bien $y'(0)$ donné. Le problème se présentera donc ainsi : trouver LA solution de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y + b(x)$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$. Cette condition permet de calculer la constante K apparaissant dans la solution générale ce qui assure l'uncicité de la solution.

Exemple Trouver la solution de $y' = -xy + x^2 + 1$ satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$. Précédemment, nous avons trouvé comme solution générale

$$y(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2}} + x.$$

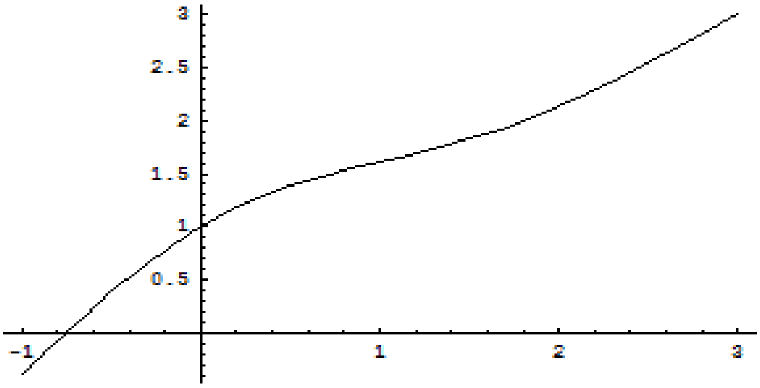
Comme $y(0) = 1$, alors

$$1 = Ke^{-\frac{0^2}{2}} + 0 = K.$$

Ainsi $K = 1$ et la solution cherchée est

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} + x.$$

La représentation graphique de cette fonction est la suivante :



4.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Seules les équations à coefficients constants sont étudiées (le cas général n'est pas connu dans son intégrabilité). Elles 'écrivent

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

où a, b, c sont des constantes et $d(x)$ une fonction donnée. La résolution est basée sur le théorème suivant :

Théorème 3 *Toute solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

est la somme

1. *de la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène (EDH) associée*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

2. *d'une solution particulière de l'équation générale.*

Ainsi la récherche des solutions de $ay'' + by' + cy = d(x)$ passera par les deux étapes décrites dans ce théorème.

4.2.1 Recherche de la solution générale de l'EDH associée

On considère l'EDH

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

L'équation caractériqtique correspondante est l'équation algébrique de degré 2

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ sont discriminant. Rappelons que

1. si $\Delta > 0$, on a les racines $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
2. si $\Delta = 0$, on a une racine double $r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a}$
3. si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Ce résultats permet de décrire toutes les solutions de l'EDH en fonction de Δ.

Théorème 4 *La solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

est

1. *Si* $\Delta > 0$,
$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x},$$
2. *Si* $\Delta = 0$,
$$y = (K_1 x + k_2) e^{r_1 x},$$
3. *Si* $\Delta < 0$, *en écrivant les racines conjuguées sous la forme* $\alpha \pm i\beta$, *alors*
$$y = e^{\alpha x}(K_1 \sin \beta x + K_2 \cos \beta x),$$

K_1 *et* K_2 *étant des constantes.*

Exemple Trouver la solution de l'équation différentielle homogène $y'' + y' + y = 0$. L'équation caractéristique est

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

Son discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$ est négatif. L'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$\alpha + i\beta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha - i\beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle homogène est

$$y(t) = e^{\frac{-1}{2}}(K_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

4.2.2 Recherche d'une solution particulière

Nous allons indiquer comment on trouve une solution particulière $g(x)$ de l'équation générale $ay'' + by' + cy = d(x)$ dans les cas suivants :

1. $d(x)$ est un polynôme de degré n. On prend pour $g(x)$ un polynôme de degré n si $c \neq 0$, de degré $n+1$ si $c = 0$. On détermine les coefficients par identification.
2. $d(x) = P(x)e^{\gamma x}$ où $P(x)$ est un polynôme de degré n. On cherche $g(x)$ sous la forme $Q(x)e^{\gamma x}$ où $Q(x)$est un polynôme
   - de degré n si γ n'est pas racine du l'équation caractéristique,
   - de degré $n+1$ si γ est racine simple de l'équation caractéristique,
   - de degré $n+2$ si γ est racine double de l'équation caractéristique.
3. $d(x) = \cos px$ ou $\sin px$. On se ramène au cas précédent en utilisant les formules d'Euler qui remplacent sin et cos par des exponentielles complexes.

De plus, il est clair que toute solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d_1(x) + d_2(x)$$

est la somme d'une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d_1(x)$$

et d'une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d_2(x).$$

Exemples

1. Intégrer l'équation différentielle
$$y'' + y = x.$$
   - Recherche de la solution générale de l'EDH. L'équation caractéristique est
   $$r^2 + 1 = 0.$$
   Elle admet pour racines les complexes conjugués
   $$\alpha + i\beta = i,\ \ \alpha - i\beta = -i.$$
   La solution générale est donc
   $$K_1 \cos x + K_2 \sin x.$$
   - Recherche d'une solution particulière de $y'' + y = x$. Ici $d(x) = x$ est un polynôme de degré 1. On cherche $g(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 1 :
   $$g(x) = ax + b.$$
   On a alors $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$. Comme g vérifie $g''(x) + g(x) = x$, on en déduit
   $$0 + ax + b = x.$$
   Par identification, on obtient $a = 1, b = 0$ d'où
   $$g(x) = x.$$

- La solution générale de $y'' + y = x$ est

$$y(x) = K_1 \cos x + K_2 \sin x + x.$$

2. Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}.$$

- Recherche de la solution générale de l'EDH. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = 1$. Elle admet pour racines

$$r_1 = 3,\ r_2 = 2.$$

La solution générale est donc

$$K_1 e^{3x} + K_2 e^{2x}.$$

- Recherche d'une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$. Ici $d(x) = e^{2x}$. Comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche $g(x)$ sous la forme

$$g(x) = P(x)e^{2x}$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré 1 :

$$g(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

On obtient $g'(x) = ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x} = (2ax+a+2b)e^{2x}$, $g''(x) = 2ae^{2x}+2(2ax+a+2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}$. Ainsi

$$(4ax + 4a + 4b)e^{2x} - 5(2ax + a + 2b)e^{2x} + 6(ax + b)e^{2x} = e^{2x}.$$

En simplifiant, on obtient

$$4a + 4b - 5a - 10b + 6b = -a = 1.$$

Ainsi, $g(x) = (-x + b)e^{2x}$. Comme on recherche une seule solution particulière, on peut prendre $b = 0$. Et donc

$$g(x) = -xe^{2x}.$$

- La solution générale de $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ est

$$y(x) = K_1 e^{3x} + K_2 e^{2x} - xe^{2x} = K_1 e^{3x} + (K_2 - x)e^{2x}.$$

4.2.3 Conditions Initiales

Nous venons de donner toutes les solutions de $ay'' + by' + cy = d(x)$. La solution générale dépend de deux constantes. Ces constantes peuvent être calculées si l'on se donne une condition initiale qui se présente souvent de la forme $y(0)$ et $y'(0)$ sont donnés. Le problème se présentera donc ainsi : trouver LA solution de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$. Ces conditions permettent de calculer les constantes $K = 1$ et K_2 qui apparaissent dans la solution générale ce qui assure l'uncicité de la solution.

Exemple Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Nous avons vu, ci-dessus, que la solution générale était :

$$y(x) = K_1 e^{3x} + (K_2 - x)e^{2x}.$$

Comme $y(0) = 1$, on en déduit

$$K_1 + K_2 = 1.$$

Calculons $y'(x)$. On a

$$y'(x) = 3K_1 e^{3x} + (2K_2 - 2x - 1)e^{2x}.$$

Ainsi

$$y'(0) = 3K_1 + 2K_2 - 1 = 1.$$

D'où le système

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ 3K_1 + 2K_2 = 2. \end{cases}$$

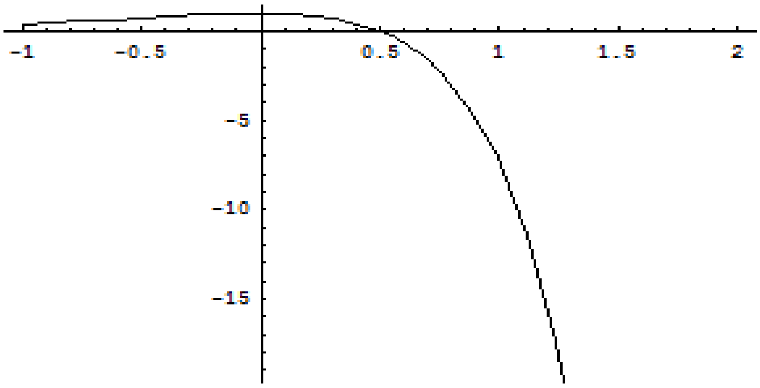
On en déduit

$$K_1 = 0, K_2 = 1.$$

La solution cherchée est donc

$$y(x) = (1 - 2x)e^{2x}.$$

Sa représentation graphique est


-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
-5
-10
-15

4.3 EXERCICES

Exercice 1. Intégrer les équations différentielles suivantes

$$y' - 2y = b(x)$$

lorsque

1. $b(x) = 2$,
2. $b(x) = e^{2x}$,
3. $b(x) = e^{3x}$.

Exercice 2. Intégrer les équations différentielles suivantes

$$xy' + y = b(x)$$

lorsque

1. $b(x) = x^2$,
2. $b(x) = \cos x$.

Exercice 3. Intégrer les équations différentielles suivantes

1. $y' \cos x - y \sin x = 2x - 1$,
2. $y' + xy = x^2 + 1$

Pour chacune, déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 4. Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2y' + y = (x^2 + x + 1)e^x.$$

Exercice 5. Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = 2\cos x.$$

Exercice 6. Intégrer l'équation différentielle suivante

$$y'' + k^2 y = 2\sin \omega x.$$

Exercice 7. Un circuit électrique comprend une bobine de résistance R et de coefficient de self-induction L et un condensateur de capacité C. Entre les bornes A et B du circuit, on établit une différence de potentiel $V_A - V_B = E_0 \sin \omega t$. Le courant électrique a une intensité $i(t)$ solution de l'équation différentielle

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) = \omega E_0 \cos \omega t.$$

Déterminer $i(t)$ sachant que $i(0) = 0$.

Exercice 8. Les lapins livré à eux mêmes doublent leur effectif numérique en six mois par procréation. Pour les loups cette période est pratiquement infinie.

Une population de loups d'effectifs $X(t)$ à l'instant t et une population de lapins d'effectif $Y(t)$ vivent ensemble : les loups mangent annuellement une quantité de lapins proportionnelle à $X(x)$ et les lapins attirent les loups étrangers en quantité annuelle proportinnelle à $Y(x)$.

Supposant les deux populations régies par les eules lois rapportées ci-dessus, étudier l'évolution des deux populations.

Chapitre 5

Intégrales généralisées

5.1 Définition de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

5.1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous avons défini

$$\int_a^b f(x)dx$$

pour des valeurs finies a et b. Soit $X \geq a$. Alors si F est une primitive de f, on a

$$\int_a^X f(x)dx = F(X) - F(a).$$

Posons $G(X) = F(X) - F(a)$. La fonction G peut être considérée comme une fonction de X. Nous allons nous intéresser à savoir si $G(X)$ admet une limite quand X tend vers $+\infty$.

Définition 6 *L'intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

est définie par

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)dx.$$

Si cette limite existe, on dit alors que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente. Sinon, on dit qu'elle est divergente.*

On définit de façon analogue $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

5.1.2 Exemple fondamental $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

définie dans $[1, +\infty[$, oùα est un réel strictement positif. On se propose d'étudier la convergence de

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$$

en fonction de α.

1. Supposons $\alpha \neq 1$. Alors, en intégrant, on obtient

$$\int_{1}^{X} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{1}^{X} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right].$$

Ainsi

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = lim_{X\to+\infty}\int_{1}^{X} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = lim_{X\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right].$$

Ainsi

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx == \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha} \quad if\alpha > 1, \\ \infty \quad if\alpha < 1. \end{cases}$$

D'où $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

2. Supposons $\alpha = 1$.

$$\int_{1}^{X} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{1}^{X} = \ln X.$$

On en déduit

$$ds\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$$

et dans ce cas $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

Théorème 5 *L'intégrale généralisée*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$$

est

1. *convergente si* $\alpha > 1$,
2. *divergente si* $0 < \alpha \leq 1$.

5.1.3 Techniques d'intégration

Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, pour étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, nous pouvons utiliser les techniques d'intégration

1. Intégrations par parties
2. Changement de variable
3. Relation de Chasles
4. Linéarité de l'intégrale

pour calculer $\int_1^X f(x)dx$ et ensuite passer à la limite.

Exemple On étudie la convergence de

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$$

Calculons $ds \int_1^X xe^{-x^2}dx$. Pour cela posons $u = x^2$. On a alors $du = xdx$ et

$$\int_1^X xe^{-x^2}dx = \int_1^{\sqrt{X}} e^{-u}du = -\left[e^{-u}\right]_1^{\sqrt{X}} = e^{-\sqrt{X}} - e^{-1}.$$

Ainsi

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = lim_{X\to+\infty}(e^{-\sqrt{X}} - e^{-1}) = -e^{-1}).$$

L'intégrale converge donc.

Mais dans la plupard des cas, nous ne pourronbs pas faire ce calcul de primitive. Dans le paragraphe suivant, nous allons voir, comment sans calculer la primitive, nous pouvons parfois conclure sur la convergence ou la divergence de l'intégrale généralisée.

5.2 Fonctions équivalentes à l'infini

5.2.1 Définition

Définition 7 *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On dit que f et g sont équivalentes à l'infini, et on écrit*

$$f \simeq_{+\infty} g$$

si la limite

$$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

existe et est différente de 0, soit

$$lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0.$$

Exemples

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+3x-2}$. Nous savons qu'à l'infini, une fraction rationnelle est équivalente à la fraction définie par les monômes de plus haut degré. Ainsi
$$\frac{x+1}{x^3+3x-2} \simeq_{+\infty} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$
2. $$\frac{x^2-2}{x+1} \simeq_{+\infty} \frac{x^2}{x} = x.$$

5.2.2 Calcul pratique

Etant donnée $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, on cherche à savoir s'il existe α tel que
$$f(x) \simeq_{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$$
. Ceci signifie que
$$\frac{f(x)}{x^{-\alpha}} = x^\alpha f(x)$$
admet une limite non nulle à l'infini.

Ainsi, pour savoir si $f(x)$ est équivalente à l'infini à $\dfrac{1}{x^\alpha}$ pour un certain α, on calculera
$$lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)$$
et on déterminera α pour que cette limite soit non nulle (si un tel α existe).

Exemples

1. Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Cette fonction est définie et continue sur $[1, +\infty[$. Considérons
$$x^\alpha \frac{\ln x}{x^2} = x^{\alpha-2} \ln x.$$
   Ainsi
   - Si $\alpha \geq 2$, $x^{\alpha-2} \ln x \Rightarrow +\infty$.
   - Si $\alpha < 2$, $x^{\alpha-2} \ln x \Rightarrow 0$.

   La fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ n'a donc pas d'équivalent à l'infini.
2. Soit $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$. On a
$$x^\alpha f(x) = x^\alpha \frac{e^{-x}}{x^2} = x^{\alpha-2} e^{-x}.$$
   Si $\alpha = 2$ alors $x^2 f(x) = e^{-x}$ et
$$lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 1.$$
   On en déduit donc que
$$f(x) \simeq_{+\infty} \frac{1}{x^2}.$$

5.2.3 Etude de $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ par équivalence

Théorème 6 *Si $f(x)$ est une fonction continue,* ***positive*** *pour $x \geq a$ et si*

$$f(x) \simeq_{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$$

alors

1. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *converge si $\alpha > 1$,*
2. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *diverge si $\alpha \leq 1$.*

Démonstration. Supposons que

$$f(x) \simeq_{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}.$$

Ceci signifie que $x^\alpha f(x) \to l \neq 0$ lorsque $x \to +\infty$. Comme $f(x) \geq 0$, ceci signifie que pour x suffisamment grand, on a

$$\frac{l}{2}\frac{1}{x^\alpha} < f(x) < \frac{3l}{2}\frac{1}{x^\alpha}$$

et

$$\frac{l}{2}\int \frac{1}{x^\alpha}dx < \int f(x)dx < \frac{3l}{2}\int \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Il en résulte que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ et $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature, c'est-à-dire, toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes. ♣

Exemples

1. Etudions la nature de
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx.$$
Comme
$$\frac{1}{x^2+1} \simeq_{+\infty} \frac{1}{x^2}$$
alors
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$$
converge (ici $\alpha = 2$).
2. Etudions la nature de
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx.$$
On sait que si $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ et
$$\ln x < \sqrt{x}.$$

Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx.$$

Mais

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2} \simeq_{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

est convergente, alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx$$

converge et donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

converge.

5.2.4 Etude de $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ par comparaison

Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ soient deux fonctions continues avec

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

pour tout $x \geq a$.Alors

$$0 \leq \int_a^X f(x)dx \leq \int_a^X g(x)dx$$

pour tout $X \geq a$. On en déduit que

1. Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge aussi.
2. Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge aussi.

Exemple Montrons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx$$

converge. On a

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

pour tout $x \geq 0$. Comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$, alors $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2+1} dx$ converge. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} dx$$

converge absolument, donc converge.

Remarque : Convergence absolue On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

converge. On montre que l'absolue convergence implique la convergence.

5.3 Définition de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, on posera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = lim_{Y\to-\infty}\int_Y^a f(x)dx + lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)dx.$$

Définition 8 *On dira que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *converge si les deux intégrales généralisées* $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ *et* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *convergent.*

Si l'une des deux ou les deux divergent, on dira que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.

Exemple Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}dx$. Nous avons vu que

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{0} \frac{|\sin(x)|}{x^2+1}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2+1}dx$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2+1}dx$ converge absolument, donc converge.

5.4 EXERCICES

Exercice 1. Etudier les intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Exercice 2. Etudier les intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx, \quad \int_0^{+\infty} 2^{-x}dx.$$

Exercice 3. Etudier les intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Exercice 4. Etudier l'intégrale généralisée suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ln x^2}{(x^2+1)^2}dx.$$

Exercice 5. On appelle transformée-cosinus de Fourier d'une fonction f, la fonction

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos sx dx.$$

Le domaine de définition de F est l'ensemble des s pour lesquels l'intégrale généralisée converge. Calculer $F(s)$ pour $f(x) = e^{-2x}$.

Exercice 6. On pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

1. Rappeler la définition de $h(t) = t^{x-1}$.
2. Pour quelle valeurs de x cette intégrale est-elle définie ?
3. Comparer $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
4. Calculer $\Gamma(n)$ pour n entier positif.