IUT GEII 1ère année

Module Maths MA21

Exercices de Révision

Exercice 1 1. Intégrer $y'' + 2y' + y = e^x$

2. Trouver la solution vérifiant $y(0)=0$ et $y'(0)=1$

1° Cherchons la solution générale de l'équation homogène $y''+2y'+y=0$
L'équation caractéristique est $r^2+2r+1=0=(r+1)^2$. Elle possède
deux racines (double) $r_1=r_2=-1$. La solution s'écrit donc

$$y_1(x) = (Ax+B)e^{-x}$$

Cherchons une solution particulière de $y''+2y'+y=e^x$. Comme le
second membre est de la forme $P(x)e^x$ avec $P(x)$ un polynôme
(ici il est égal à 1), on cherche cette solution $y_2(x)$ sous la forme
$y_2(x) = Q(x)\,e^x$ avec $d°Q(x) = d°P(x) = 0$. Posons donc
$y_2(x) = a e^x$. alors $y_2'(x) = ae^x$, $y_2''(x) = ae^x$. Comme $y_2(x)$
est solution de $y''+2y'+y=e^x$, on en déduit

$$ae^x + 2ae^x + ae^x = e^x$$

soit $\quad 4ae^x = e^x$

d'où $\quad 4a = 1$, $a = \frac{1}{4}$

Ainsi $y_2(x) = \frac{1}{4}e^x$

Conclusion : la solution générale de $y''+2y'+y=e^x$ est donc

$$\boxed{y(x) = y_1(x) + y_2(x) = (Ax+B)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x}$$

2°) Si $y(0)=0$, alors $(A.0+B)e^{-0} + \frac{1}{4}e^0 = B + \frac{1}{4} = 0$.

D'où $B = -\frac{1}{4}$

Si $y'(0)=1$, alors comme $y'(x) = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$
$y'(0) = A - B + \frac{1}{4} = 1$. d'où $A = B - \frac{3}{4} = -1$ et $\boxed{y(x) = \left(-x-\frac{1}{4}\right)e^{-x} + \frac{e^x}{4}}$

Exercice 2 Trouver la solution générale de
$$y' - 2xy = xe^{x^2}$$

L'équation homogène est $y' - 2xy = 0$. Cherchons la solution générale :

$$y' - 2xy = 0 \iff y' = 2xy$$

d'où $\frac{y'}{y} = 2x$. En intégrant on obtient

$$\ln|y| = x^2 + C$$

d'où la solution générale de l'équation homogène

$$y_1(x) = Ke^{x^2}$$

Cherchons une solution particulière de $y' - 2xy = xe^{x^2}$ par la méthode de la variation de la constante. Posons

$$y_2(x) = K(x)e^{x^2}$$

Il vient $y_2'(x) = K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2}$

Comme $y_2' - 2xy_2 = xe^{x^2}$, on obtient

$$K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2} - 2xK(x)e^{x^2} = xe^{x^2}$$

d'où $K'(x)\, e^{x^2} = xe^{x^2}$

$$K'(x) = x$$

$$K(x) = \frac{x^2}{2}$$

et $y_2(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$

Conclusion : la solution générale de $y' - 2xy = xe^{x^2}$ est

$$\boxed{y(x) = y_1(x) + y_2(x) = Ke^{x^2} + \frac{x^2}{2}e^{x^2} = \left(K + \frac{x^2}{2}\right)e^{x^2}}$$

Exercice 3 1. Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$

2. En déduire

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$$

1. Posons $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Alors $\cos^2 x = \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2e^{ix}e^{-ix}}{4} = \dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4}$

$$\sin^2 x = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2e^{ix}e^{-ix}}{-4} = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}$$

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{4} \cdot \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}$$

$$= -\frac{1}{16}\left[e^{4ix}+1-2e^{2ix}+1+e^{-4ix}-2e^{-2ix}+2e^{2ix}+2e^{-2ix}-4\right]$$

$$= -\frac{1}{16}\left[\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)-2\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\right]+\frac{1}{8} =$$

$$\boxed{\cos^2 x \sin^2 x = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}}$$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right] dx$

$$= \int \frac{dx}{8} - \int \frac{\cos 4x}{8} dx$$

$$\boxed{\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C}$$

Exercice 4

1. Décomposer en éléments simples
$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$$

2. En déduire $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$

1- La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ s'écrit :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+2)}$$

Pour trouver a on multiplie par $(x-1)^2$ puis $x=1$ ce qui donne $a = \frac{1}{3}$

Pour trouver c on multiplie par $x+2$ puis $x=-2$ ce qui donne $c = \frac{1}{9}$

Il reste à déterminer b. Multiplions tout par x puis $x = \infty$:

$$0 = 0 + b + c \quad \text{d'où} \quad b = -c = -\frac{1}{9}$$

et $$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{1}{9(x-1)} + \frac{1}{9(x+2)}$$

2. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{9}\ln|x+2|}$$

Exercice 6

Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4}\,dx$

$$\int \frac{dx}{2x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{2}+1}$$

Posons $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{d'où } u^2 = \frac{x^2}{2}\right)$; $du = \frac{1}{\sqrt{2}}dx$ et $dx = \sqrt{2}\,du$

$$\int \frac{dx}{\frac{x^2}{2}+1} = \int \frac{\sqrt{2}\,du}{u^2+1} = \sqrt{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}\,u = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{2x^2+4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C}$$

Exercice 5 Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2x+1}\,dx \quad ; \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$$

Rappelons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$ $(\alpha > 0)$

- On a $\displaystyle\frac{x+1}{x^3+2x+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, d'après le critère d'équivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+2x+1}\,dx$ converge (notons que $1+2x+x^3$ ne s'annule pas pour $x \geq 1$)

- On a $\displaystyle\frac{1}{(x-1)(x-2)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Donc $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ converge.
(on note également que $(x-1)(x-2)$ ne s'annule pas dans le domaine d'intégration)

- $\displaystyle\frac{x+3}{1+x^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$ est divergente.