IUT MA 21

Transformées de Laplace
Exercices de révision

A savoir par coeur :

- définition $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$
- les formules suivantes

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots - f^{(n-1)}(0)$$

(ici f est dérivable n fois)

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) . \mathcal{L}(g)(s)$$

où $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du$

Exercice 1. a) Soit $f(t) = 1 - \cos t$. Calculer $\mathcal{L}(f)(s)$

b) Soit $f(t) = e^{-t}(1 - \cos t)$. Calculer $\mathcal{L}(f)(s)$

on pourra utiliser les tables

Corrigé. a) soit $f(t) = 1 - \cos t$. Comme la transformée de Laplace est linéaire, alors

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(\cos t)(s)$$

La table des transformées de Laplace donne

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad , \quad \mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{s^2+1} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

D'où $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-s^2}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s(s^2+1)}$

b) Soit $f(t) = e^{-t}(1 - \cos t)$. On sait que

$\mathcal{L}(e^{-s_0 t} g(t))(s) = \mathcal{L}(g(t))(s+s_0)$. Si $g(t) = 1 - \cos t$, alors

$$\mathcal{L}(e^{-s_0 t}(1-\cos t))(s) = \mathcal{L}(1-\cos t)(s+s_0).$$

Ici $s_0 = 1$, d'où

$$\mathcal{L}(e^{-s_0 t}(1-\cos t))(s) = \mathcal{L}(1-\cos t)(s+1)$$
$$= \frac{1}{(s+1)((s+1)^2+1)}$$

(on remplace dans l'expression de $\mathcal{L}(1-\cos t)(s)$, s par $s+1$)

D'où $\mathcal{L}(e^{-s_0 t}(1-\cos t))(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$.

Exercice 2. Intégrer

$$f'(t) + 2f(t) = \frac{3}{2}e^t$$

Donner la solution vérifiant $f(0)=0$.

Solution. Utilisons la transformée de Laplace (on suppose f causale)

$$\mathcal{L}(f'+2f)(s) = \frac{3}{2}\mathcal{L}(e^t)(s)$$

Or $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0) = s\,\mathcal{L}(f)(s)$

Donc $\mathcal{L}(f'+2f)(s) = \mathcal{L}(f')(s) + 2\mathcal{L}(f)(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) + 2\mathcal{L}(f)(s)$
$$= (s+2)\mathcal{L}(f)(s)$$

De plus, d'après la table

$$\mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s+1} \qquad (\mathrm{Re}(s+1)>0)$$

Ainsi $(s+2)\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{s+1}$

et $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

Pour déterminer $f(t)$, décomposons la fraction en élément simple.

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

Pour calculer a, multiplions par $s+1$ puis faisons $s=-1$. On obtient $a=1$. De même $b=-1$. D'où

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Or $\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t})(s)$ (pour $t \geqslant 0$) $\operatorname{Re} s > 0$

$\frac{1}{s+2} = \mathcal{L}(e^{-2t})(s)$ (pour $t \geqslant 0$) $\operatorname{Re} s > 0$

D'où $\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \mathcal{L}(e^{-t})(s) - \mathcal{L}(e^{-2t})(s) = \mathcal{L}(e^{-t} - e^{-2t})(s)$.

On en déduit

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{3(e^{-t} - e^{-2t})}{2}\right)(s)$$

et $\boxed{f(t) = \frac{3(e^{-t} - e^{-2t})}{2}}$

Exercice. Résoudre en utilisant la transformée de Laplace

$$f''(t) + 4f'(t) + 3f(t) = 3H(t)$$

où $f(t)$ est une fonction causale vérifiant

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

La fonction $H(t)$, appelée fonction de Heaviside ou bien échelon unité est définie par $H(t) = 1$ si $t \geqslant 0$. Sa transformée de Laplace vaut

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0).$$

On a $\mathcal{L}(f''+4f'+3f)(s)=\mathcal{L}(f'')(s)+4\mathcal{L}(f')(s)+3\mathcal{L}(f)(s)$

Or $\mathcal{L}(f'')(s)=s^2\mathcal{L}(f)(s)-sf(0)-f'(0)$

$$=s^2\mathcal{L}(f)(s)-1$$

$$\mathcal{L}(f')(s)=s\mathcal{L}(f)(s)-f(0)=s\mathcal{L}(f)(s)$$

Ainsi

$$\mathcal{L}(f''+4f'+f)(s)=s^2\mathcal{L}(f)(s)+4s\mathcal{L}(f)(s)+3\mathcal{L}(f)(s)-1$$
$$=(s^2+4s+3)\mathcal{L}(f)(s)-1$$

On pourra remarquer que le polynôme devant $\mathcal{L}(f)(s)$ est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle.

On obtient donc

$$(s^2+4s+3)\mathcal{L}(f)(s)=\frac{3}{s}+1=\frac{3+s}{s}$$

soit $\mathcal{L}(f)(s)=\dfrac{3+s}{s(s^2+4s+3)}=\dfrac{3+s}{s(s+1)(s+3)}=\dfrac{1}{s(s+1)}$

Décomposons en éléments simples cette fraction rationnelle

$$\frac{1}{s(s+1)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+1}.$$

Pour calculer a, multiplions par s puis faisons $s=0$.

On obtient $a=1$. De même $b=-1$

$$\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

D'où $\mathcal{L}(f)(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}=\mathcal{L}(H)-\mathcal{L}(e^{-t})(s)$

On en déduit $f(t)=H(t)-e^{-t}$.

Exercice. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) + 2x_2'(t) + 3x_3'(t) = 0 \\ x_1'(t) - x_2'(t) = 3t - 3 \\ x_2'(t) + 2x_3'(t) = 1 - t^2 \end{cases}$$

et trouver la solution vérifiant les conditions initiales

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$$

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. Le système différentiel s'écrit

$$A X'(t) = B(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t-3 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$

Résolvons ce système en utilisant la transformée de Laplace (on suppose donc $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ fonctions causales)

Posons $Y_1(s) = \mathcal{L}(x_1(t))(s)$, $Y_2(s) = \mathcal{L}(x_2(t))(s)$, $Y_3(s) = \mathcal{L}(x_3(t))(s)$

et prenons la transformée de Laplace de chacune des équations. Pour la 1° équation, on obtient

$$\mathcal{L}(x_1')(s) + 2\mathcal{L}(x_2')(s) + 3\mathcal{L}(x_3')(s) = \mathcal{L}(0) = 0$$

Or $\mathcal{L}(x_1')(s) = s\mathcal{L}(x_1)(s) - x_1(0) = s\,Y_1(s) - 0$

De même $\mathcal{L}(x_3')(s) = s\mathcal{L}(x_3)(s) - x_3(0) = s\,Y_3(s)$

$$\mathcal{L}(x_2')(s) = s\mathcal{L}(x_2)(s) - x_2(0) = s\,Y_2(s)$$

Ainsi la première équation est transformer en

$$sY_1(s) + 2sY_2(s) + 3sY_3(s) = 0$$

Pour la deuxième équation, posons $b_2(t) = 3t - 3$

On a $\mathcal{L}(x_1' - x_2') = \mathcal{L}(b_2)$

soit $sY_1(s) - sY_2(s) = \mathcal{L}(3t-3)(s)$

or $\mathcal{L}(3t-3)(s) = 3\mathcal{L}(Id)(s) - 3\mathcal{L}(1)(s)$

$$= \frac{3}{s^2} - \frac{3}{s}$$

Ainsi la deuxième équation devient

$$sY_1(s) - sY_2(s) = \frac{3-3s}{s^2}$$

Pour la 3: équation, on obtient

$$sY_2(s) + 2sY_3(s) = \mathcal{L}(1-t^2)(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}$$

On a donc le système

$$\begin{cases} sY_1(s) + 2sY_2(s) + 3sY_3(s) = 0 \\ sY_1(s) - sY_2(s) = \dfrac{3-3s}{s^2} \\ sY_2(s) + 2sY_3(s) = \dfrac{s^2-2}{s^3} \end{cases}$$

Simplifions par s, et on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} Y_1(s) + 2Y_2(s) + 3Y_3(s) = 0 \\ Y_1(s) - Y_2(s) = \dfrac{3-3s}{s^3} \\ Y_2(s) + Y_3(s) = \dfrac{s^2-2}{s^4} \end{cases}$$

La matrice du système est toujours la matrice A.

Calculons A^{-1} (si elle existe)

$\det A = -3 \neq 0$ donc A est inversible.

D'où $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Et $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3s-3s^2}{s^4} \\ \frac{s^2-2}{s^4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{-3s+3s^2+3s^2-6}{s^4} \\ \frac{6s-6s^2+3s^2-6}{s^4} \\ \frac{-3s+3s^2-3s^2+6}{s^4} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{s-2s^2+2}{s^4} \\ \frac{-2s+s^2+2}{s^4} \\ \frac{s-2}{s^4} \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} Y_1(s) = \frac{s-2s^2+2}{s^4} = \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^4} = \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2!} - 2t + \frac{2t^3}{3!}\right) \\ Y_2(s) = \frac{-2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^4} = \mathcal{L}\left(\frac{-2t^2}{2!} + t + \frac{2t^3}{3!}\right) \\ Y_3(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s^4} = \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{2t^3}{3!}\right) \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x_1(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \\ x_2(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t \\ x_3(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \end{cases}$