Résumé des travaux

Sommaire :

1 Résumé court

Mes travaux portent sur les plusieurs domaines algébriques : groupes finis et infinis, anneaux et algèbres de Lie, algèbres de Lie-type, algèbres universelles.

Les trois grands axes de mes études sont :

- ✓ Caractérisation d'un groupe ou d'une algèbre par leurs automorphismes ;
- ✓ Algèbres de Lie graduées ;
- ✓ Larges sous-systèmes (sous-groupes, idéaux, congruences) caractéristique avec une identité.

Ces sujets sont reliés entre eux. Par exemple, les algèbres graduées apparaissent naturellement dans l'étude des groupes nilpotents et des algèbres de Lie avec automorphismes d'ordre fini. Les théorèmes sur les sous-groupes larges caractéristiques se sont montrés très utile pour l'investigation des groupes avec automorphismes presque réguliers.

Dans le domaine des algèbres de Lie, ma contribution principale est une généralisation du théorème de Kreknin. En collaboration avec E.Khukhro nous avons démontré la presque résolubilité de l'algèbre de Lie munie d'un automorphisme d'ordre fini avec le centralisateur de dimension finie [29, 11]. Ce résultat est non trivial même pour les algèbres de dimension finie et résolubles, puisque le théorème contient des bornes de co-dimension et de longueur de résolubilité. Pour l'automorphisme presque régulier d'ordre premier nous avons démontré l'existence d'un idéal nilpotent avec des bornes similaires.

Ces théorèmes sur les algèbres de Lie impliquent des conséquences sur les groupes localement nilpotents sans torsion munis d'un automorphisme d'ordre fini avec le centralisateur de rang fini.

L'application des méthodes de Lie aux groupes périodiques est un problème plus compliqué.

Pour résoudre ce problème nous avons créé une méthode originale qui permet de “transformer” les sous-groupes normaux vérifiant l'identité multilinéaire en sous-groupes caractéristiques vérifiant la même identité [13, 10]. Comme application, nous avons résolu un problème soulevé par Shumyatsky en 1990 sur les groupes localement finis munis d'un automorphisme presque régulier d'ordre 4 [30].

Pour les algèbres de Lie graduées avec un petit nombre de composantes homogènes nous avons démontré l'existence d'idéaux résolubles et nilpotents de co-dimension bornée, avec des bornes fortes [24]. Ces résultats ont permis d'obtenir une généralisation du théorème classique de Jacobson sur les algèbres nilpotentes de dérivations [15].

Récemment les théorèmes sur les algèbres de Lie graduées avec un petit nombre de composantes se révèlent être utile dans la nouvelle situation où le groupe de Frobenius opère sur une algèbre de Lie par des automorphismes. Nous avons démontré que si un groupe de Frobenius FH avec noyau cyclique F et complément H d'ordre q agit sur une algèbre de Lie A de telle manière que la sous-algèbre de points fixes $C_A(F)$ est triviale et la sous-algèbre de points fixes $C_A(H)$ est nilpotente de classe c, alors A est nilpotente de classe limitée par une fonction ne dépendant que de c et q [32, 16]. Une corollaire de ce résultat pour les groupes finis implique une réponse affirmative à une question de Mazurov dans “Kourovka Notebook” [32].

Dans les démonstrations de ces résultats nous avons dû surmonter des difficultés substantielles. Les méthodes développées sont originales et représentent de puissants outils d'investigations. Ils ont prouvé leur efficacité par la résolution de problèmes complexes.

Tous les résultats collectifs sont obtenus en collaboration indivisible. L'ordre des auteurs dans les publications collectives ne reflète pas le poids attribué à la contribution de chacun, mais correspond a l'ordre alphabétique des noms.

2 Automorphismes presque réguliers

2.1 Contexte

Soient A un système algébrique (un groupe, ou une algèbre de Lie, ou une algèbre associative, etc.) et G un groupe fini des automorphismes de A. On suppose que l'ensemble des points fixes $C_A(G) := \{a \in A \mid a^\varphi = a \ \ \forall\, \varphi \in G\}$ est “petit” dans un sens ou un autre. Par exemple, on peut choisir le nombre des éléments dans les groupes finis, ou le rang dans les groupes sans torsion, ou la dimension dans les algèbres de Lie, pour une mesure de la grandeur de $C_A(G)$. Dans un grand nombre de cas, on peut dériver des informations importantes sur la structure de A étant données seulement des informations sur l'ensemble des points fixes $C_A(G)$ et l'ordre de G. Par exemple, il est bien connu qu'un groupe fini avec un automorphisme involutif sans points fixes non triviaux est commutatif. Il y a beaucoup autres (mai moins élémentaires) résultats prouvant que les propriétés de l'ensemble des points fixes ont un impact fort sur la structure algébrique. Nous mentionnons quelques théorèmes célèbres.

Brauer, Fowler, 1955 [4]. Tout groupe fini muni d'un automorphisme involutif avec le sous-groupe des points fixes d'ordre m a un sous-groupe résoluble de l'indice borné par une fonction de m.

Thompson, 1959 [36]. Tout groupe fini muni d'un automorphisme d'ordre premier sans points fixes non triviaux est nilpotent.

Shunkov, 1972 [35]. Tout groupe d'exposant fini muni d'un automorphisme involutif avec le sous-groupe des points fixes fini est localement fini.

Bergman, Isaacs, 1973 [2]. Soient A une algèbre associative, G un groupe fini des automorphismes de A. Si $C_A(G) = 0$ et A est sans $|G|$-torsion, alors $A^{f(|G|)} = 0$.

Bakhturin, Zaicev, Linchenko, 1998 [1, 21]. Soient L une algèbre de Lie, G un groupe fini des automorphismes de L. Si L est sans $|G|$-torsion et $C_L(G)$ satisfait une identité, alors L satisfait une identité.

Ayant une hypothèse faible et une forte conclusion les théorèmes de cette sorte jouent un rôle important dans la théorie des groupes et dans la théorie des algèbres. Par exemple, la classification des groupes simples finis repose sur le théorème de Brauer–Fowler.

2.2 Algèbres de Lie avec un automorphisme presque régulier

Un automorphisme φ d'une algèbre est dit *régulier*, si la sous-algèbre de ses points fixes est triviale, c'est-à-dire φ n'a aucun point fixe autre que 0. D'après le théorème de Kreknin [19] une algèbre de Lie L munie d'un automorphisme régulier d'ordre fini n est résoluble de longueur de résolubilité au plus égale à $2^n - 2$. (Plus tôt Borel et Mostow [3] ont prouvé la résolubilité dans le cas de l'algèbre de dimension finie sans borne pour la longueur de résolubilité.)

Nous avons démontré la presque résolubilité de l'algèbre de Lie munie d'un automorphisme presque régulier d'ordre fini.

Théorème (Khukhro, Makarenko, 2003, 2004). *Si une algèbre de Lie L admet un automorphisme d'ordre fini n tel que la sous-algèbre des points fixes soit de dimension finie m, alors L contient un idéal résoluble de co-dimension finie. De plus, la longueur de résolubilité est limitée par une fonction ne dépendant que de n et la co-dimension est limitée par une fonction ne dépendant que de m et n.*
Publié dans :

[29] Makarenko N. Yu., Khukhro E. I., Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms, J. of Algebra, V. 277, N 1, 370-407, (2004) ;

[11] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu. Lie rings with almost regular automorphisms, J. of Algebra, V.264, N 2, 641-664, (2003).

Ce résultat donne une réponse affirmative à une conjecture de longue date.

La preuve du théorème est complexe et est purement de la nature combinatoire. Lorsque l'automorphisme est d'un ordre infini, les résultats similaires sont impossibles : par exemple, l'algèbre de Lie libre engendrée par les f_i, $i \in \mathbb{Z}$ admet évidemment l'automorphisme régulier défini par l'application $f_i \to f_{i+1}$.

Ce théorème peut être appliqué au groupe localement nilpotent sans torsion muni d'un automorphisme presque régulier d'ordre fini. Ici, "presque régulier" signifie que le rang du sous-groupe des points fixes est fini. Cette application est basée sur la correspondance de Malcev entre la catégorie des groupes radicables localement nilpotents sans torsion et la catégorie des algèbres de Lie sur $\mathbb{Q}$ localement nilpotentes.

Rappelons, qu'un *groupe a un rang* r si chaque sous-groupe de type fini peut être engendré par r éléments.

Corollaire (Khukhro, Makarenko, 2003, 2004). *Si un groupe localement nilpotent sans torsion admet un automorphisme d'ordre fini n dont le sous-groupe des points fixes est de rang fini r, alors le groupe possède un sous-groupe normal résoluble H de co-rang fini. De plus, le co-rang de H est limité par une fonction ne dépendant que de r et n et la longueur de résolubilité est limitée par une fonction ne dépendant que de n.*
Publié dans :

[29] Makarenko N. Yu., Khukhro E. I., Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms, J. of Algebra, V. 277, N 1, 370-407, (2004).

2.3 Groupes avec un automorphisme presque régulier

Mon résultat principal dans ce domaine est une résolution du problème de Shumyatsky (Kourovka notebook, 1991, [37]) sur les groupes finis avec un automorphisme presque régulier d'ordre 4.

Théorème (Makarenko, Khukhro, 2006). *Si un groupe G localement fini admet un automorphisme d'ordre 4 avec exactement m points fixes, alors G contient un sous-groupe H résoluble d'indice fini. De plus, il existe une constante c telle que ce sous-groupe H soit une extension d'un groupe nilpotent de classe c par un groupe nilpotent de classe 2 et l'indice de H est borné par une fonction de m.*
Publié dans :

[30] Makarenko N. Yu., Khukhro E. I., Finite groups with an almost regular automorphism of order four, Algebra and Logic, V. 45, N 5 (2006), 326–343.

Ce résultat est une généralisation du théorème de Kovac [18] sur les automorphismes réguliers. La preuve s'est montrée compliquée. Elle repose sur trois résultats principaux, dont le premier est un théorème de l'auteur sur les 2-groupes finis :

Théorème (Makarenko, 1993, 2001). *Si un 2-groupe G localement fini admet un automorphisme d'ordre 4 avec exactement m points fixes, alors G contient un sous-groupe H tel que $[[H,H],[H,H],H]=1$ et l'indice de H est fini et borné par une fonction de m.*
Publié dans :

[22] Makarenko N. Yu. Finite 2-groups admitting an automorphisms of order 4 with few fixed points, Algebra and Logic, V.32 (1993), N 4, 215-230 ;

[23] Makarenko N. Yu. Finite 2-groups with automorphisms of order 4, Algebra and Logic, V. 40 (2001), N 1, 48-56.

La deuxième source nécessaire est le résultat suivant sur les anneaux de Lie.

Théorème (Makarenko, Khukhro, 1996, 1998). *Si une algèbre de Lie admet un automorphisme φ d'ordre 4 tel que la sous-algèbre des points fixes soit de dimension finie m, alors il existe une constante c telle que L contienne une sous-algèbre M de co-dimension finie borné par une fonction de m telle que $\gamma_c(\gamma_3(M))=0$; de plus la sous-algèbre $[L,\varphi^2]$ contient une sous-algèbre nilpotente de classe $\leqslant c$ et de co-dimension finie borné par une fonction de m.*
Publié dans :

[26] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Lie rings with automorphisms of degree 4 with small number of a fixed points, Algebra and Logic, 35, N 1 (1996), 21–43 ;

[28] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Lie rings admitting an automorphism of order 4 with few fixed points. II, Algebra and Logic, 37, N 2 (1998), 78–91.

Ce théorème sur des anneaux de Lie implique seulement un résultat [27] avec des bornes “faibles”, dépendant de m. Une nouvelle technique, discutée dans la section 4, permet de “transformer” un sous-groupe nilpotent normal de classe c et d'indice k en un sous-groupe caractéristique de la même classe c d'indice bornée par une fonction de c et k. Cela nous permet de terminer la preuve.

2.4 Le groupe de Frobenius comme groupe d'automorphismes

Rappelons, qu'un groupe de Frobenius FH avec noyau F et complément H peut être caractérisé comme le groupe fini qui est un produit semidirect d'un sous-groupe normal F sur lequel H agit par des automorphismes de telle manière que $C_F(h) = 1$ pour chaque $h \in H\backslash\{1\}$. Par le théorème de Thompson [36] le noyau F est nilpotent, et par le théorème de Higman [6] la classe de F est bornée par une fonction ne dependant que de plus petit diviseur premier de $|H|$ (estimations explicites pour la classe sont dues à Kreknin et Kostrikin [19, 20]). Si un groupe de Frobenius FH opère sur un groupe G de telle manière, que GF est également un groupe de Frobenius, le produit GFH est appelé un double groupe de Frobenius. Les doubles groupes de Frobenius surgissent, en particulier, dans l'étude des graphes de Gruenberg-Kegel des groupes finis. Dans [33] Mazurov a montré que si GFH est un double groupe de Frobenius tels que $C_G(H)$ est abélien et H est d'ordre 2 ou 3, alors G est nilpotent de classe au plus égale à 2. Suite à ce résultat il a soulevé la question de savoir si en général la classe de G peut être bornée seulement en termes de $|H|$ et de classe de $C_G(H)$ ([39, problème 17.72 (a)]). La première justification substantielle de cette hypothèse a été donnée par Khukhro. Il a démontré dans [9] que si $(|G|, |H|) = 1$ et $C_G(H)$ est abélien, alors G est nilpotent de classe bornée en termes de $|H|$. Récemment on a confirmé que la réponse à la question de Mazurov est positive.

Théorème (Makarenko, Shumyatsky, 2010). Soit GFH un double groupe de Frobenius avec complément H d'ordre q. Supposons que $C_G(H)$ est nilpotent de classe c. Alors G est nilpotent de classe bornée par une fonction ne dépendant que de c et q.

Publié dans :

[32] N. Yu. Makarenko, P. Shumyatsky Frobenius groups as groups of automorphisms, Proc. AMS, in press.

Ce théorème est basé sur le résultat correspondant sur les anneaux de Lie.

Théorème (Makarenko, Shumyatsky, 2010). Si FH est un groupe de Frobenius avec noyau F d'ordre premier et complément H d'ordre q opère sur un anneau de Lie K par des automorphismes de telle manière que $C_K(F) = 0$ et $C_K(H)$ est nilpotent de classe c, alors K est nilpotent de classe bornée par une fonction ne dépendant que c et q.

Publié dans :

[32] N. Yu. Makarenko, P. Shumyatsky Frobenius groups as groups of automorphisms, Proc. 2010, V. 138, N 10, P.3425–3436.

Le cœur de la preuve est un critère de nilpotence assez compliqué pour les algèbres de Lie graduées. Un autre élément important de la preuve est le théorème de Shalev sur les algèbres de Lie graduées avec un petit nombre de composantes homogènes non-nulles [34].

Récemment, en collaboration avec E. Khukhro et P. Shumyatsky nous avons également étudié la situation plus générale : le groupe de Frobenius FH avec noyau F d'ordre arbitraire agit sur un groupe fini de telle manière que $C_G(F) = 1$. Dans ce cas, le groupe GFH n'est pas impérativement un double groupe de Frobenius, parce qu'il peut exister $f \in F$ tel que $C_G(f) \neq 1$. Il s'est avéré que les diverses propriétés de G sont proches des propriétés correspondantes du $C_G(H)$ et “indépendants” de F. Par exemple, nous avons démontré que l'ordre de G est borné en termes de $|H|$ et de $|C_G(H)|$, le rang de G est borné en termes de $|H|$ et du rang de $C_G(H)$, et que G est nilpotent si $C_G(H)$ est nilpotent. Dans le cas du groupe FH de Frobenius FH avec noyau cyclique F d'ordre arbitraire nous avons démontré que la classe de nilpotence de G est bornée en termes de $|H|$ et de classe de nilpotence de $C_G(H)$, et l'exposant de G est borné en termes de $|FH|$ et l'exposant de $C_G(H)$. Les preuves des résultats ci-dessus emploient intensivement méthodes Lie-théorique. La technique des anneaux de Lie basée sur l'algèbre de Lie de Lazard, associée à la filtration de Jennings-Zassenhaus, a été utilisée pour établir une borne pour l'exposant de G. Le problème de borner la classe de nilpotence s'est également réduit à une question Lie-théorique.

Théorème (Khukhro, Makarenko, Shumyatsky, 2010). Supposons que un groupe de Frobenius FH avec complément H d'ordre q et noyau cyclique F opère sur une algèbre de Lie L. Si $C_L(F) = 0$ et sous-algèbre $C_L(H)$ est nilpotente de classe c, alors L est nilpotente de classe bornée par une fonction ne dépendant que de c et q.

Publié dans :

[16] E.I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, P. Shumyatsky, Fixed Points of Frobenius Groups of Automorphisms, Doklady Mathematics, 2011, Vol. 83, No.2, arXiv :1010.0343v1

3 Algèbres graduées

Les algèbres G-graduées surgissent naturellement dans l'étude des algèbres munies d'une l'action d'un groupe commutatif de l'ordre fini. Ceci est dû au fait qu'après l'extension du corps de base par une racine primitive n-ième de l'unité ω, $|G| = n$, les espaces $A_\gamma = \{a \in A \mid \varphi(a) = \gamma(g)a \quad \forall g \in G\}$, où γ est un élément du groupe des caractères linéaires $\hat{G} = \mathrm{Hom}_{groupes}(G, \langle w\rangle)$, se comportent comme les composantes d'une G-graduation :

$$A_{\gamma_1} A_{\gamma_2} \subseteq A_{\gamma_1\gamma_2}$$

et

$$nA \subseteq \sum S_\gamma.$$

Ainsi, beaucoup de problèmes se réduisent aux algèbres graduées. Par exemple, la preuve du théorème de Kreknin [19] se réduit à la preuve de la résolubilité d'une algèbre de Lie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graduée $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ avec la composante neutre L_0 égale à zéro. La preuve de notre théorème sur les algèbres de Lie avec un automorphisme presque régulier se réduit également au problème sur l'algèbre de Lie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graduée $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$, mais dans ce cas-ci la composante neutre L_0 est de dimension finie m.

3.1 Algèbres de Lie graduées avec un petit nombre de composantes homogènes

Certains problèmes se réduisent à l'étude des algèbres de Lie graduées avec un petit nombre $d << n$ de composantes homogènes non-nulles. Dans ce cas, il est souvent possible d'obtenir des résultats avec des bornes indépendantes de n. Nous avons démontré que si une algèbre de Lie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graduée a un petit nombre de composantes non-nulles et $\dim L_0 = m$, alors l'algèbre est presque résoluble avec les bornes ne dépendant que de d et de m :

Théorème (Makarenko, 2007). *Si dans une algèbre de Lie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graduée $L = L_0 + L_1 + \cdots + L_{n-1}$ la composante L_0 est de dimension finie m et si le nombre de composantes non-nulles parmi les L_i est égal à d, alors L contient un idéal résoluble de longueur de résolubilité bornée par une fonction de d et de co-dimension finie bornée par une fonction de m et d.*
Publié dans :

[24] Makarenko N. Yu. Graded Lie algebras with a few non-trivial components, Sib. Math. J., V. 48 (2007), N 1, 95-111.

Un exemple intéressant d'une application de ce théorème est lié à un théorème classique de Jacobson [7]. Supposons qu'une algèbre de Lie de dimension finie L de caractéristique 0 admette une algèbre de Lie nilpotent de dérivations D. Alors, si D est sans constantes (c'est à dire, $x^\delta = 0 \;\; \forall\, \delta \in D \;\Leftrightarrow\;\; x = 0$), L est nilpotente. Nous avons obtenu la généralisation du théorème de Jacobson :

Théorème (Khukhro, Makarenko, Shumyatsky, 2008). *Soient L une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique 0, D une algèbre de Lie de dérivations de poids d. Si la composante de degré 0 de Fitting par rapport à D est de dimension m, alors L contient un idéal nilpotent de classe de nilpotence bornée par une fonction de d et de co-dimension limitée par une fonction de m et d.*
Publié dans :

[15] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu., Shumyatsky P. Nilpotent ideals in graded Lie algebras and almost constant-free derivations, Communications in Algebra, V. 36 (2008), N 5, P. 1869 -1882.

La preuve repose sur le théorème de Khukhro-Shumyatsky [17] et sur le théorème suivant sur les algèbres de Lie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graduées avec un petit nombre de composantes non-nulles, et d'ailleurs le nombre n dans la graduation peut être choisi premier.

Théorème (Khukhro, Makarenko, Shumyatsky, 2007). *Soient p un nombre premier, L une algèbre de Lie $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-graduée $L = L_0 + L_1 + \cdots + L_{p-1}$ avec la composante L_0 de dimension finie m. Si le nombre de composantes non-nulles parmi les L_i est égal à d, alors L contient un idéal nilpotent de classe bornée par une fonction de d et de co-dimension finie bornée par une fonction de m et d.*
Publié dans :

[15] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu., Shumyatsky P. Nilpotent ideals in graded Lie algebras and almost constant-free derivations, Communications in Algebra, V. 36 (2008), N 5, P. 1869 -1882.

3.2 Algèbres de Lie-type graduées

Dans la section 2.2, nous avons énoncé la théorème sur les algèbres de Lie munies d'un automorphisme presque régulier. La preuve de ce résultat est de nature purement combinatoire et n'emploie pas la théorie structurale. C'est pourquoi il était très naturel d'essayer de le répandre pour une classe plus large d'algèbres, appelées algèbres de Lie-type. Cette classe inclut les algèbres associatives, les algèbres de Lie, les super-algèbres, les algèbres de Leibniz, etc.

Théorème (Makarenko, Khukhro, 2009 [31]). *Soit L une algèbre de Lie-type $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-graduées*

$$L = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$$

sur un corps commutatif F, c'est-à-dire $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t \,(\mathrm{mod}\, n)}$ et quels que soient les entiers g, h, k ils existent $\alpha \neq 0, \beta \in F$, tels que

$$(ab)c = \alpha a(bc) + \beta(ac)b$$

pour tous $a \in L_g$, $b \in L_h$, $c \in L_k$. Si la composante neutre L_0 est de dimension finie m, alors L contient un ideal nilpotent de classe bornée par une fonction de n et de co-dimension finie bornée par une fonction de m et n.

La preuve est basée sur la preuve du théorème relatif aux algèbres de Lie. La difficulté principale est une absence de l'identité de l'anticommutativité.

Corollaire (Makarenko, Khukhro, 2009). *Soit $L = L_0 \oplus L_1$ une algèbre G-graduée*

$$L = L_0 \oplus L_1 = \sum_{g \in G} (L_0^{(g)} \oplus L_1^{(g)}).$$

Si G est cyclique d'ordre fini impair et $L_0^{(1)} = L_0 \cap L^{(1)}$ est de dimension finie, alors L contient un idéal résoluble de co-dimension finie.

Remarque. Comme dans tous les théorèmes précédents il y a des bornes pour la co-dimension du idéal et de la longueur de résolubilité.

4 Existence d'un système caractéristique

4.1 Larges sous-groupes avec une identité

Si un groupe G a, par exemple, un sous-groupe nilpotent H de classe c et d'indice fini n, alors G a également un sous-groupe nilpotent normal de classe c et d'index $\leqslant n!$. Mais parfois, il est nécessaire que ce sous-groupe soit normal dans un plus grand groupe (où G est lui-même un sous-groupe normal) ; pour cela, nous avons besoin d'un sous-groupe caractéristique de G. On peut naturellement considérer la fermeture automorphe $\prod_{\alpha \in \mathrm{Aut}\, G} H^{\alpha}$, qui est un sous-groupe nilpotent caractéristique de classe $\leqslant cn$. Mais si on mène une induction sur la longueur d'une certaine série sous-normale, il est souhaitable de ne pas augmenter la classe de nilpotence du sous-groupe à chaque étape. Nous avons prouvé que, dans cette situation, il y a un sous-groupe nilpotent caractéristique de même classe c dont l'indice est borné par une fonction de n et c.

Théorème (Makarenko, Khukhro, 2007). *Si un groupe G contient un sous-groupe nilpotent de classe c dont l'indice est fini et égal à n, alors G contient un sous-groupe caractéristique nilpotent de même classe c dont l'indice est fini et borné par une fonction de n et c.*

Publié dans :

[13] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu. : Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities, J. of London Math. Soc., V. 75, N 3 (2007), 635-646.

Un tel résultat a été connu jusqu'ici seulement pour les sous-groupes abéliens, c'est-à-dire, pour $c = 1$.

Nous avons également prouvé un résultat similaire pour un sous-groupe satisfaisant une identité, donnée par un commutateur multilinéaire.

Définition. Soient x_1, $x_2, \ldots$ des variables de groupe. Les *commutateurs multilinéaires de poids* 1 *en variables* x_i sont les variables x_i eux-mêmes. Par induction, *commutateurs multilinéaires de poids* $w > 1$ *en variables* x_i sont les commutateurs de la forme $\varkappa = [\varkappa_1, \varkappa_2]$, où $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ sont les commutateurs multilinéaires avec des ensembles disjoints de variables des poids w_1 et w_2 avec $w = w_1 + w_2$. Un groupe G satisfait une identité, donnée par le commutateur multilinéaire $\varkappa = 1$ si et seulement si le sous-groupe (verbal) $\varkappa(G)$ obtenu en remplaçant toutes les variables dans le commutateur $\varkappa$ par le groupe G est trivial. Les identités données par les commutateurs multilinéaires incluent les identités de la résolubilité de la longueur de résolubilité donnée, de la nilpotence de la classe donnée, etc.

Théorème (Makarenko, Khukhro, 2007). *Soit G un groupe qui contient un sous-groupe H vérifiant l'identité $\varkappa(H) = 1$, où $\varkappa$ est un commutateur multilinéaire de poids w. Si l'indice de H est fini et égal à n, alors G contient un sous-groupe caractéristique N vérifiant la même identité $\varkappa(C) = 1$ dont l'indice est fini et borné par une fonction de n et w.*

Publié dans :

[13] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu.) Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities, J. of London Math. Soc., V. 75, N 3, 635-646.

En effet, les méthodes employées dans la preuve de ce théorème permettent de mettre en évidence une conclusion plus forte.

Théorème (Khukhro, Kljachko, Makarenko, Melnikova 2008). *Soient G un groupe, $\varkappa$ un commutateur multilinéaire de poids w. Alors il existe seulement un nombre fini de sous-groupes d'indice fini, qui sont maximaux (pour l'inclusion) parmi les sous-groupes normaux satisfaisant l'identité $\varkappa = 1$. De plus, le nombre de tels sous-groupes de l'index $\leqslant n$ ne dépasse pas $2^{F^{w-1}(n)}$, où $F^k(x)$ est la k-ième itération de la fonction $F(x) = xn^{2^x}$.*

Publié dans :

[10] Khukhro E. I. Klyachko A. A., Makarenko N. Y., Melnikova Y. B., Automorphism invariance and identities, 2008, soumis à J. of London Math. Soc.

J'énonce maintenant un autre théorème similaire pour des groupes ayant un sous-groupe normal nilpotent de co-rang r.

Théorème (Makarenko, Khukhro, 2007). *Soient G un groupe, H un sous-groupe normal nilpotent de classe c tels que le quotient G/H ait le rang fini r. Si H est sans torsion ou périodique, alors G contient un sous-groupe nilpotent caractéristique C de classe $\leqslant c$ tel que le quotient G/C ait un rang fini et borné par une fonction de r et c.*

Publié dans :

[12] Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank and automorphically-invariant nilpotent ideals of bounded codimension in Lie algebras, Quarterly J. Math. V. 58, N 2, 229-247.

Remarque. Il existe des exemples démonstrant que les conditions sur le sous groupe H sont essentielles.

Ce théorème a permis de résoudre le problème 13.58 dans Kourovka notebook [38] sur des groupes avec un automorphisme de l'ordre premier qui est presque régulier en sens du rang (E. Khukhro, [8]).

La preuve du théorème dans le cas du sous-groupe sans torsion est basée sur le résultat similaire pour une algèbre de Lie avec un idéal nilpotent de co-dimension finie. Dans la section 4.2 nous énonçons même un résultat beaucoup plus général pour des algèbres arbitraires (pas nécessairement de Lie, ou associatives, ou commutatives) et des identités multilinéaires arbitraires.

4.2 Larges idéaux avec une identité

Théorème (Makarenko, Khukhro, 2007). *Soient A une algèbre sur un corps commutatif, H un idéal de co-dimension finie r satisfaisant une identité multilinéaire $f \equiv 0$. Alors A contient un idéal I stable par tous les automorphismes de A, satisfaisant la même identité $f \equiv 0$, de la co-dimension finie bornée par une fonction ne dépendant que de r and de f.*

Publié dans :

[14] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu. Automorphically-invariant ideals satisfying multilinear commutator identities, and group-theoretical applications, J. of Algebra, V. 320, N 4 (2008), 1723-1740.

Ce théorème ne peut pas être généralisé aux algèbres sur des anneaux arbitraires, même aux algèbres de Lie sur $\mathbb{Z}$. Nous avons produit un exemple d'un anneau de Lie nilpotent, qui contient un idéal abélien avec le quotient de rang 2 comme un groupe additif, mais n'a pas un idéal abélien stable par les automorphismes avec le quotient de rang fini.

4.3 Algèbres universelles

Mes recherches récentes incluent des algèbres universelles. L'idée est de généraliser les résultats des sections 4.1 et 4.2 aux structures algébriques arbitraires. La théorie des commutateurs [5] permet de formuler un problème très général :

Problème. Soient $\mathbf{A}$ une algèbre universelle, ϑ une congruence satisfaisant une identité donnée par un commutateur multilinéaire $\varkappa$. Si le quotient $\mathbf{A}/\vartheta$ est d'ordre fini n, est-il vrai que $\mathbf{A}$ contient également la congruence caractéristique ξ satisfaisant la même identité $\varkappa$ telle que le quotient $\mathbf{A}/\xi$ soit fini d'ordre borné par une fonction de n et $\varkappa$?

Nous avons démontré que le problème a une réponse affirmative pour les algèbres d'une variété modulaire.

Théorème (Makarenko, 2008, [25]). *Soient $\mathscr{V}$ variété modulaire, $\mathscr{V} \ni \mathbf{A}$ une algèbre universelle, ϑ une congruence satisfaisant une identité donnée par un commutateur multilinéaire $\varkappa$. Si le quotient $\mathbf{A}/\vartheta$ est d'ordre fini n, alors $\mathbf{A}$ contient une congruence ξ satisfaisant la même identité $\varkappa$ telle que le quotient $\mathbf{A}/\xi$ soit d'ordre fini, borné par une fonction de n et c.*

Références

[1] Y. A. Bahturin, M. V. Zaicev, Identities of Graded Algebras, *J. of Algebra*, **205** (1998), 1–12.

[2] G. M. Bergman, I. M. Isaacs, Rings with fixed-point-free group actions, *Proc. London. Math. Soc.* **27**, N 3 (1973), 69–87.

[3] BOREL A., MOSTOW G. D., On semi-simple automorphisms of Lie algebras, *Ann. Math. (2)*, **61** (1955), 389–405.

[4] R. BRAUER, K. A. FOWLER, On groups of even order, *Annals of Mathematics*, **62**, N 3 (1955), 565–583.

[5] R. FREESE, R. MCKENZIE, Commutator theory for congruence modular variety, London Math. Soc. Lecture Note, N **125**, 1987.

[6] G. HIGMAN, Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements. J. London Math. Soc. (2) **32** (1957), 321–334.

[7] N. JACOBSON, A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 281–283.

[8] E. I. KHUKHRO, Groups with an automorphism of prime order that is almost regular in the sense of rank, *J. London Math. Soc.*, **75**, N 3 (2007), 635-646.

[9] E. I. KHUKHRO, Graded Lie rings with many commuting components and an application to 2-Frobenius groups. Bull. London Math. Soc., **40**, (2008), 907–912.

[10] E. I. KHUKHRO, A. A. KLYACHKO, N. YU. MAKARENKO, Y. B. MELNIKOVA, Automorphism invariance and identities, 2009, J.of London Math. Soc., **41**, N 5, (2009), 804-816. (arXiv :0812.1359v1)

[11] E. I. KHUKHRO, N. YU. MAKARENKO, Lie rings with almost regular automorphisms, *J. Algebra*, 264, N 2 (2003), 641–664.

[12] E. I. KHUKHRO, N. YU. MAKARENKO, Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank and automorphically-invariant nilpotent ideals of bounded codimension in Lie algebras, *Quarterly J. Math.* **58**, N 2 (2007), 229–247.

[13] E. I. KHUKHRO, N. YU. MAKARENKO, Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities, *J. of London Math. Soc.* **75**, N 3 (2007), 635–646.

[14] E. I. KHUKHRO, N. YU. MAKARENKO, Automorphically-invariant ideals satisfying multilinear commutator identities, and group-theoretical applications, *J. of Algebra*, **320**, N 4 (2008), P. 1723–1740.

[15] E. I. KHUKHRO, N. YU. MAKARENKO, P. SHUMYATSKY, Nilpotent ideals in graded Lie algebras and almost constant-free derivations, *Communications in Algebrà*, **36**, N 5 (2008), 1869–1882.

[16] E. I. KHUKHRO, N. YU. MAKARENKO, P. SHUMYATSKY, *Doklady Mathematics*, **83** (2011), No. 2. arXiv :1010.0343v1 [math.GR]

[17] E. I. KHUKHRO, P. SHUMYATSKY, Lie algebras with almost constant-free derivations, *J. Algebra*, **306**, N 2 (2006), 544–551.

[18] L. G. KOVACS, Groups with regular automorphisms of order four, *Math. Z.*, **75** (1961), 277–294.

[19] V. A. KREKNIN, The solubility of Lie algebras with regular automorphisms of finite period, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **150** (1963), 467–469 (Russian) ; English transl., *Math. USSR Doklady* **4** (1963), 683–685.

[20] V. A. KREKNIN, A. I. KOSTRIKIN, Lie algebras with regular automorphisms, Math. USSR Doklady. **4**, (1963), 355–358.

[21] V. LINCHENKO, Identities of Lie algebras with actions of Hopf algebras, *Communications in algebra*, **25**, N 10 (1997), 3179 - 3187.

[22] N. Yu. Makarenko, Finite 2-groups admitting an automorphism of order 4 with few fixed points, *Algebra i Logika*, **32**, N 4 (1993), 402–427 ; Engl. transl. in *Algebra and Logic*, **32**, N 4 (1993), 215–230.

[23] N. Yu. Makarenko, Finite 2-groups with automorphisms of order 4, *Algebra i Logika*, **40**, N 1 (2001), 83–96 ; Engl. transl. in *Algebra and Logic*, **40**, N 1 (2001), 47–54.

[24] N. Yu. Makarenko, Graded Lie algebras with a few non-trivial components, *Sib. Math. J.*, **48**, N 1 (2007), 95–111.

[25] N. Yu. Makarenko, Large automorphically-invariant congruences with commutator identities, *Preprint*, Novosibirsk, 2009.

[26] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Lie rings with automorphisms of degree 4 with small number of a fixed points, *Algebra i Logika*, **35**, N 1 (1996), 41–78 ; Engl. transl. in *Algebra and Logic*, **35**, N 1 (1996), 21–43.

[27] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Nilpotent groups admitting an almost regular automorphism of order 4, *Algebra and Logika*, **35**, N 3 (1996), 314–333 ; Engl. transl. in *Algebra and Logic*, **35**, N 3 (1996), 176–187.

[28] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Lie rings admitting an automorphism of order 4 with few fixed points. II, *Algebra i Logika*, **37**, N 2 (1998), 144–166 ; Engl. transl. in *Algebra and Logic*, **37**, N 2 (1998), 78–91.

[29] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms, *J. Algebra*, **277**, N 1 (2004), 370–407.

[30] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Finite groups with an almost regular automorphism of order four, *Algebra and Logic*, **45**, N 5 (2006), 326–343.

[31] N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, Graded Lie-type algebras with finite-dimensional identity component, en préparation. *Preprint* (en russe), Novosibirsk, 2009.

[32] N. Yu. Makarenko, P.Shumyatsky, Frobenius groups as groups of automorphisms, *Proc. AMS*, **138** (2010), N 10, P. 3425–3436.

[33] V. D. Mazurov, Recognition of the finite simple groups $S_4(q)$ by their element orders. Algebra Logic, **41** (2002), 93–110.

[34] A. Shalev, Automorphisms of finite groups of bounded rank, Israel J. Math. **82** (1993), 395–404.

[35] V. P. Shunkov, On periodic groups with an almost regular involution, *Algebra and Logic*, **11**, N 4 (1972), 260–272.

[36] J. Thompson, Finite groups with fixed-point-free automorphosms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45** (1959), 578–581.

[37] *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook*, 11th ed., Institute of Mathematics, Novosibirsk, 1990.

[38] *Unsolved problems in Group Theory. Kourovka Notebook*, 13th ed., Institute of Mathematics, Novosibirsk, 1995.

[39] *Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook*, 17th ed., Institute of mathematics, Novosibirsk, 2010.